ES.3

Matemática

Diseño Curricular para la Educación Secundaria

3º año

Dirección General de Cultura y Educación
Buenos Aires
La Provincia

Dirección General de Cultura y Educación

DCES3 Matemática / Coordinado por Claudia Bracchi. - 1a ed. - La Plata, Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires, 2009. 96 p.; 28x20 cm.

ISBN 978-987-1266-56-2

1. Diseño Curricular. 2. Matemática.. I. Bracchi, Claudia , coord.

CDD 375

Edición y diseño
Dirección de Producción de Contenidos

Subsecretaría de Educación
Calle 13 entre 56 y 57 (1900) La Plata
Provincia de Buenos Aires

ISBN 978-987-1266-56-2

Hecho el depósito que marca la Ley N° 11.723
dir_contenidos@ed.gba.gov.ar

Equipo de especialistas

Coordinación

Lic. Marina Paulozzo

Matemática

Prof. Dora Guil

Prof. Ernesto Maqueda

Prof. Julio Brisuela

Prof. Silvia Rodríguez

ÍNDICE

La Plata, 28 de diciembre de 2007

Resolución

Visto el Expediente Nº 5811-3.208.973/08; y CONSIDERANDO:

Que por la Resolución Nº 318/07 se aprueba el proyecto de implementación del prediseño curricular del segundo año de la Educación Secundaria;

Que dicho proyecto constituye la prosecución de las acciones de la experiencia iniciada en el ciclo lectivo 2006 para el primer año de la Educación Secundaria;

Que la cohorte de alumnos 2006 inicia, en el ciclo lectivo 2008, el tercer año de la Educación Secundaria;

Que corresponde darle continuidad a dicha experiencia para completar las acciones ya iniciadas, dándole coherencia a las mismas y produciendo las modificaciones aconsejadas por las experiencias de los años 2006 y 2007 en el marco de los Diseños Curriculares aprobados por las Resoluciones N° 3233/06, 2495/07 y 2496/07;

Que en función de lo expuesto resulta necesario pautar las adecuaciones transitorias a la organización institucional y Plantas Orgánico Funcionales que permitan la implementación en las escuelas que participen de la experiencia;

Que las setenta y cinco escuelas que participan son las que oportunamente se nominalizaran en el Anexo 2 de la Resolución N° 318/07;

Que el Consejo General de Cultura y Educación aprobó el despacho de la Comisión de Asuntos Técnico Pedagógicos en Sesión de fecha 24-04-08 y aconseja el dictado del correspondiente acto resolutivo;

Que en uso de las facultades conferidas por el artículo 69 inc. e) y k) de la Ley 13688, resulta viable el dictado del pertinente acto resolutivo;

Por ello

EL DIRECTOR GENERAL DE CULTURA Y EDUCACION

RESUELVE

ARTÍCULO 1º. Aprobar el proyecto de implementación del Diseño Curricular del tercer año de la Educación Secundaria que obra en el Anexo 1 de la presente Resolución y consta de cuatro (4) carillas.

ARTÍCULO 2°. Determinar que el proyecto aprobado por el Artículo 1º se aplicará con carácter de experiencia durante el ciclo lectivo 2008 en las setenta y cinco escuelas en las que se implementó la experiencia 2007 del segundo año de la Educación Secundaria y que fueran detalladas en el Anexo 2 de la presente Resolución que consta de tres (3) carillas.

ARTÍCULO 3°. Establecer que en las setenta y cinco escuelas seleccionadas para su implementación se realizarán las reorganizaciones institucionales necesarias, al solo efecto de su aplicación, las que quedarán sin efecto una vez concluido el ciclo lectivo 2008 y cuyas orientaciones obran en el Anexo 3 que forma parte de la presente Resolución y consta de tres (3) carillas.

Corresponde al Expediente Nº 5811-3.208.973/08

ARTÍCULO 4°. Determinar que las reorganizaciones de las Plantas Orgánico Funcionales mencionadas en el Artículo 3° tendrán vigencia sólo durante el período en que se desarrolle la mencionada experiencia no generando antecedentes al momento de su universalización.

ARTÍCULO 5º. La presente Resolución será refrendada por el señor Vicepresidente 1º del Consejo General de Cultura y Educación de este Organismo.

ARTÍCULO 6º. Registrar esta Resolución que será desglosada para su archivo en la Dirección de Coordinación Administrativa, la que en su lugar agregará copia autenticada de la misma; comunicar al Departamento Mesa General de Entradas y Salidas; notificar al Consejo General de Cultura y Educación; a la Subsecretaría de Educación; a la Subsecretaría Administrativa; a la Dirección Provincial de Educación de Gestión Estatal; a la Dirección Provincial de Educación de Gestión Privada; a la Dirección Provincial de Educación Inicial; a la Dirección Provincial de Educación Primaria; a la Dirección Provincial de Educación Secundaria; a la Dirección Provincial de Educación Superior y Capacitación Educativa; a la Dirección Provincial de Política Socio Educativa; a la Dirección Provincial de Educación Técnico Profesional; a la Dirección Provincial de Inspección General y por su intermedio a todas las Jefaturas Regionales y Distritales; a la Dirección de Educación de Adultos; a la Dirección de Educación Física; a la Dirección de Educación Artística; a la Dirección de Tribunales de Clasificación; a la Dirección de Asuntos Docentes; a la Dirección de Comunicación y Prensa y a la Dirección Centro de Documentación e Investigación Educativa. Cumplido, archivar.

Resolución Nº 0317/07

Marco General para la Educación Secundaria

Introducción

A diez años de la implementación de la Transformación del Sistema Educativo en la provincia de Buenos Aires y frente a los desafíos que implica concebir la educación del siglo XXI, la Dirección General de Cultura y Educación elaboró una nueva propuesta pedagógica para la educación de los jóvenes adolescentes bonaerenses que garantice la terminalidad de la escuela secundaria en condiciones de continuar los estudios en el Nivel Superior. Asimismo, que posibilite ingresar al mundo productivo con herramientas indispensables para transitar el ámbito laboral y ser ciudadanos en condiciones de ejercer sus derechos y deberes, hacer oír su voz con profundo respeto por las instituciones democráticas, y en la plenitud de los ejercicios de las propias prácticas sociales y culturales.

Esta nueva propuesta para el sistema educativo provincial implica un profundo cambio en la concepción político-pedagógica de los sujetos destinatarios y se plasma en una nueva organización de la Educación Secundaria que ubica este tránsito educativo como el espacio de escolaridad que atiende a sujetos púberes, adolescentes y jóvenes, y tiene como objetivo fundamental lograr la inclusión, permanencia y acreditación de la educación secundaria de todos los alumnos bonaerenses.

De esta manera, la Educación Secundaria (ES) se organiza en 6 años de escolaridad distribuidos en 3 años de Secundaria Básica y 3 años de Secundaria Superior.

La Educación Secundaria del Sistema Educativo Provincial

Históricamente, el nivel secundario se constituyó como un ciclo de carácter no obligatorio y preparatorio para el ingreso a los estudios superiores, reservado para las futuras "clases dirigentes". Así nació el Bachillerato clásico, humanista y enciclopedista cuya función era seleccionar a los alumnos que estarían en condiciones de ingresar a la Universidad. A lo largo de la historia, al bachillerato clásico se fueron sumando distintas modalidades: escuelas de comercio, industriales, técnicas que otorgaban distintos títulos según la orientación. Creaciones de orientaciones y modalidades de organización y propuestas de reformas signaron la enseñanza media (o secundaria), a lo que se sumó siempre la tensión por el reconocimiento social y la validez de los títulos que otorgaba: desde las Escuelas Normales y la preparación de las maestras normales, hasta las escuelas técnicas y los conflictos para el ingreso a la Universidad.

No obstante, a medida que el sistema educativo del país, y en particular el de la provincia de Buenos Aires se fueron expandiendo y la escuela primaria absorbió a sectores tradicionalmente excluidos del sistema educativo, la secundaria se vio desbordada. De esta manera, la función selectiva y preparatoria para la que había nacido se vio sacudida por los cambios socioculturales, históricos y políticos, la expansión de la escuela primaria y el acceso de grandes masas poblacionales al nivel medio, que pondrían en cuestión este rasgo fundacional.

A la preparación para los estudios superiores se sumaron la necesidad de formar para el trabajo (objetivos que se plasmaron en las escuelas de comercio, industriales y más tarde las escuelas técnicas) y la formación integral de los ciudadanos, que se materializó en los distintos diseños curriculares humanistas y enciclopedistas, con la definición de materias que atravesaron todas las modalidades de escuela media (lengua, literatura, historia, geografía y educación cívica o educación moral, formación ética y ciudadana según la época, entre otras) y que se convirtieron en conocimientos considerados indispensables a ser transmitidos por la escuela.

Sin embargo, no fue hasta la Ley Federal de Educación (Ley Nº 24.195/93) que el nivel medio (o secundario) contó con una ley orgánica para organizar el conjunto del nivel. En dicha ley, las viejas modalidades y orientaciones del secundario fueron modificadas junto con el resto del sistema educativo, dejando como segunda enseñanza los últimos tres años organizados como nivel Polimodal con distintas orientaciones. En esta transformación, los primeros dos años de la vieja estructura del secundario fueron absorbidos por la Educación General Básica. En la provincia de Buenos Aires, al igual que en muchas jurisdicciones del país, el 1º y el 2º año de la ex escuela secundaria se transformaron en los últimos dos años de una escuela primaria prolongada.

Cabe destacar que el cambio operado por la reestructuración del sistema a partir de la Ley Federal de Educación obedecía, en gran parte, al momento histórico que marcaba la necesidad de extender una educación común básica y obligatoria para todos los alumnos y las alumnas. No obstante, dicha reestructuración ligó la exigencia de ampliar la base común de conocimientos y experiencias a la modificación del sistema educativo en el cual la escuela secundaria quedó desdibujada. Es decir que a los conflictos y tensiones históricas se sumaron otros nuevos, vinculados a la creación de un ciclo que institucionalmente sumó características de la vieja escuela primaria en su vida cotidiana, pero que a la vez sostuvo viejas prácticas selectivas y expulsivas de la vieja escuela secundaria.

Comenzado el siglo XXI, y luego de diez años de implementación de la Ley Federal de Educación, la Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires entiende que es preciso reconfigurar el sistema educativo con vistas a hacer frente a los desafíos actuales y futuros de los bonaerenses, para lo cual es preciso estructurar una nueva secundaria.

Es en este sentido que, a partir de la sanción de la Ley de Educación Nacional N° 26.206, la provincia de Buenos Aires profundizó el proceso de análisis, reflexión crítica y participativa con todos los sectores sociales que derivó en la sanción de la nueva Ley de Educación Provincial N° 13.688 que, en vinculación con la LEN, define la Educación Secundaria de 6 años y obligatoria.

La nueva secundaria recoge los mandatos históricos del nivel, pero resignificados en el contexto actual y futuro de la provincia, el país, la región y el mundo.

La nueva secundaria cumple con la prolongación de la educación común y la obligatoriedad, al tiempo que respeta las características sociales, culturales y etarias del grupo destinatario, proponiendo una nueva estructura para el sistema. Esta nueva estructura tiene en el centro de sus preocupaciones el desafío de lograr la inclusión de todos los jóvenes de la Provincia para que –a partir de obtener los conocimientos y herramientas necesarias– terminen la educación obligatoria y continúen en la Educación Superior.

Para ello, se considera a la nueva secundaria como el espacio privilegiado para la educación de los adolescentes bonaerenses, un lugar que busca el reconocimiento de las prácticas juveniles y las incluye en propuestas pedagógicas que les posibilitan fortalecer su identidad, construir proyectos de futuro y acceder al acervo cultural construido por la humanidad, interpelando a los sujetos en su complejidad, en la tensión de la convivencia intergeneracional para la cual los adultos en la escuela son responsables de transmitir la cultura a las nuevas generaciones.

En consecuencia, la Educación Secundaria de seis años de duración tiene como propósitos:

- ofrecer situaciones y experiencias que permitan a los alumnos la adquisición de saberes para continuar sus estudios;
- fortalecer la formación de ciudadanos;
- vincular la escuela y el mundo del trabajo a través de una inclusión crítica y transformadora de los alumnos en el ámbito productivo.

Adquirir saberes para continuar los estudios

Una de las funciones centrales de la Educación Secundaria es la de reorganizar, sistematizar y profundizar los saberes adquiridos en la Educación Primaria y avanzar en la adquisición de nuevos saberes que sienten las bases para la continuación de los estudios asegurando la inclusión, permanencia y continuidad de los alumnos en el sistema educativo provincial y nacional mediante una propuesta de enseñanza específica, universal y obligatoria, que a la vez promueva la reflexión y comprensión del derecho de acceso al patrimonio cultural de la Provincia, el país y el mundo.

La selección de los conocimientos a ser enseñados en este nivel es un recorte de la vastedad de experiencias y saberes que forman parte de la cultura. Atendiendo a la necesidad de contar con un repertorio posible para ser enseñado en la escuela, la propuesta curricular que se presenta se dirige no sólo a que los alumnos adquieran esos saberes, sino que puedan reconocerlos como aquellos conocimientos necesarios, pero a la vez precarios, inestables y siempre cambiantes, producto del constante movimiento de la ciencia, las artes y la filosofía, al que tienen el derecho fundamental de acceder como sujetos sociales.

A su vez, la profundización y sistematización de estos conocimientos a lo largo de la escolaridad secundaria permitirán a los alumnos introducirse en el estudio sistemático de determinados campos del saber que sienten las bases para garantizar la continuidad de sus estudios y para ser sujetos de transformación social.

El plantear como finalidad la continuidad de los estudios en el Nivel Superior no tiene por única intención el éxito en el ingreso, permanencia y egreso de los estudiantes en los siguientes niveles educativos del sistema. Las experiencias pedagógicas potentes y profundas en el acceso al conocimiento de las artes, la literatura, las ciencias y otros campos de conocimiento permiten realizar mejores elecciones en el momento de decidir qué seguir estudiando.

Fortalecer la formación de ciudadanos

Partiendo del reconocimiento de los alumnos de la Educación Secundaria como sujetos adolescentes y jóvenes, y considerando que es desde sus propias prácticas que se constituyen en ciudadanos, se busca provocar el reconocimiento de las prácticas juveniles y transformarlas en parte constitutiva de las experiencias pedagógicas de la escolaridad para fortalecer la identidad, la ciudadanía y la preparación para el mundo adulto, entendiendo que su inclusión en la escuela hace posible la formación de sujetos libres para expresarse, actuar y transformar la sociedad.

El trabajo sobre las propias prácticas de los sujetos, sus intereses y particularidades como un grupo fundamentalmente heterogéneo en sus historias, sus contextos y convicciones debe ser el centro de acción de la escuela; por esto, enseñar y aprender los Derechos y Deberes es condición necesaria pero no suficiente para ser ciudadano. En una sociedad compleja, signada por la desigualdad, ser ciudadano no es equiparable a la posibilidad de ejercer sus derechos, aunque esto constituye parte fundamental de su construcción. Se es ciudadano aun en las situaciones en las que el ejercicio de los derechos se ve coartado total o parcialmente, y es justamente por esa condición de ciudadano que un sujeto debe ser reconocido como parte integrante de la sociedad. A partir de ello deben considerarse las prácticas culturales de los diversos grupos, entendiendo que el sólo reconocimiento de la diversidad y la diferencia no permite avanzar en la interculturalidad: para ello es necesario intervenir y actuar en la conflictividad que implican necesariamente las relaciones sociales.

Vincular la escuela con el mundo del trabajo

Gran parte de los adolescentes que asisten a las escuelas de la Provincia trabajan o han trabajado debido a las necesidades y carencias familiares a las que deben hacer frente. Sin embargo, y a pesar de su temprana incorporación al mundo productivo, los jóvenes son objeto de discriminaciones y abusos en los ámbitos del trabajo justamente por ser considerados “inexpertos”, ser menores de edad y no estar contemplados en los derechos laborales y porque los adultos les asignan tareas realizar que, en la mayoría de los casos, ellos mismos no quieren realizar.

No obstante, se considera que no es función de la escuela secundaria la temprana especialización para el mundo del trabajo, sino brindar oportunidades para conocer los distintos ámbitos productivos, reflexionar sobre su constitución histórica y actual y reconocerlos como los lugares que pueden y deben ocupar y transformar. Esto implica incluir el trabajo como objeto de conocimiento que permita a los alumnos reconocer, problematizar y cuestionar el mundo productivo en el cual están inmersos o al cual se incorporarán en breve.

Asimismo, y en concordancia con la formación de ciudadanos y la inclusión de las prácticas juveniles, es preciso reconocer los saberes del trabajo que portan los jóvenes y adolescentes para potenciar los saberes socialmente productivos que ya poseen.

El trabajo, en este sentido, debe dejar de considerarse objeto privativo de ciertas modalidades de la secundaria y convertirse en un concepto estructurante de la nueva Educación Secundaria provincial para que "trabajar o estudiar" no se transformen en decisiones excluyentes. Los jóvenes bonaerenses tienen que contar con un tránsito formativo que les permita conocer, problematizar y profundizar los conocimientos para tomar decisiones futuras sobre la continuidad de estudios y su inserción en el mundo productivo.

En función de avanzar en la construcción de la nueva secundaria del sistema educativo provincial se ha elaborado una nueva propuesta de enseñanza que se concreta en el presente Diseño Curricular. Se espera que el mismo actúe como un instrumento de acción para los docentes, directivos y para las diversas instancias de asesoramiento y supervisión de las escuelas, y se constituya en un documento público para alumnos y padres respecto de las definiciones educativas del nivel.

El currículum que aquí se presenta constituye, por otro lado, un programa de acción para los próximos años que, en un lapso no mayor a cinco años, deberá evaluarse, ajustarse y modificarse.

Fundamentos de la propuesta para la Educación Secundaria

Toda propuesta de enseñanza lleva implícitos o explícitos fundamentos pedagógicos que le otorgan cohesión, coherencia y pertinencia. En este Diseño Curricular se decide hacerlos explícitos, entendiendo que cada una de las decisiones que se tomaron en la elaboración del presente currículum están ancladas en una determinada concepción de lo educativo.

En este Diseño Curricular se parte de concebir al Currículum como la síntesis de elementos culturales (conocimientos, valores, costumbres, creencias, hábitos) que conforman una propuesta político-educativa (De Alba; 2002). Esta definición implica entonces que el currículum es una propuesta histórica, cultural, social y políticamente contextuada y, por lo tanto, producto de un devenir histórico. De la misma manera, entonces, dicha propuesta a la vez que presenta su potencialidad transformadora, presenta sus límites y por lo tanto la futura necesidad de ser modificada.

Asimismo, esta concepción abarca no sólo la prescripción que se realiza en el documento curricular, sino que incorpora las prácticas concretas de todos los actores educativos vinculados a través de las distintas instancias del sistema.

No obstante, el documento curricular reviste un carácter fundamental en tanto propuesta de trabajo que requiere de cambios en las prácticas institucionales y, por lo tanto, constituye un desafío a futuro, una apuesta a transformar la enseñanza y mejorar los aprendizajes de los alumnos de las escuelas.

Dicha síntesis cultural ha sido conceptualizada para este Diseño Curricular en algunos elementos que se articulan entre sí, originando el contorno dentro del cual se inscriben las decisiones de enfoque, selección y organización de los contenidos de cada materia para su enseñanza.

La trama conceptual que aquí se presenta responde a la necesidad de elaborar una propuesta para la educación de jóvenes, por lo que compromete a sujetos en interacción y los productos de estos vínculos e intercambios. Por otra parte, significa contextualizarla en la vastedad del territorio bonaerense y, al mismo tiempo, en la institución escolar.

En este sentido, definir un currículum para los jóvenes bonaerenses implica tanto tomar decisiones acerca del conjunto de saberes, conocimientos y recortes disciplinares que deberán realizarse, como definir las condiciones en las que deberán ser enseñados. Se pretende constituir un espacio que reconozca y aproveche las prácticas juveniles, los saberes socialmente aprendidos, para potenciar las enseñanzas y los aprendizajes.

Por ende, una de las concepciones que fundamentan este tránsito educativo es la asunción de los niños, adolescentes y jóvenes como sujetos de derecho. Es dentro de este paradigma de interpretación de los actores sociales que se piensa y se interpela al joven como un actor completo, un sujeto pleno, con derechos y capacidad de ejercer y construir ciudadanía.

La *ciudadanía* se sitúa, de este modo, como un primer concepto clave en esta propuesta político-educativa y es entendida como el producto de los vínculos entre las personas, y por lo tanto conflictiva, ya que las relaciones sociales en comunidad lo son. De este modo, se recuperan las prácticas cotidianas –juveniles, pedagógicas, escolares y/o institucionales– que podrán ser interpeladas desde otros lugares sociales al reconocer las tensiones que llevan implícitas. Una ciudadanía que se construye, desarrolla y ejerce tanto dentro como fuera de la escuela: al aprender, expresarse, educarse, organizarse y vincularse con otros jóvenes y otras generaciones.

En ocasiones, en la escuela se ha trabajado desde una representación del ciudadano "aislado", fuera de otras determinaciones que no sean las propias capacidades, una representación de ciudadano que puede ejercer su ciudadanía en una sociedad ideal, sin conflictos ni contradicciones, y por ende, sin atravesamientos de poder ni resistencias. Es la ilusión de sujetos que únicamente necesitan "aprender a ser ciudadanos", para que les esté garantizado el ejercicio de su ciudadanía. Por otra parte, desde esta perspectiva, también se refuerza la idea de que es principalmente en su tránsito por la escuela donde los niños y jóvenes se "transforman en ciudadanos", cuando la sociedad se sostiene en muchas otras instituciones que deben integrarse en la construcción de ciudadanía.

Resignificar estas concepciones implica desandar esta definición estática de la ciudadanía, para pasar a trabajar en las escuelas con una ciudadanía activa, que se enseña y se aprende como práctica y ejercicio de poder, y no sólo como abstracción.

Trabajar con y desde la ciudadanía activa implica, en consecuencia, centrarse en un segundo concepto clave en la presente propuesta: *interculturalidad*. Pensar desde la perspectiva de la interculturalidad implica entender que la ciudadanía se ejerce desde las prácticas particulares de grupos y sujetos sociales. Estas prácticas ciudadanas, entonces, ponen al descubierto la trama de las relaciones sociales y por lo tanto la conflictividad de las interacciones. Asimismo, desde la perspectiva que se adopta en este Diseño Curricular, esta noción se entrelaza con la concepción de ciudadanía para enfrentar los desafíos que implica educar en un contexto de diversidad cultural, diferencia social y desigualdad económica, y actuar en el terreno de las relaciones sociales entendidas como producto del conflicto y no de la pasividad de la convivencia de los distintos grupos sociales y culturales.

> La interculturalidad es, como señala Canadell, ante todo, una actitud, una manera de percibirse uno mismo y la propia cultura como partes integrantes de un complejo interrelacionado que llamamos mundo. Toda cultura se fundamenta en una manera de estar en el mundo y de percibirlo. Esta experiencia constituye la base de nuestros pensamientos sobre la realidad (Canadell; 2001). Por ello, una cultura no es solamente una manera particular de entenderla, sino una realidad propia. Así, decimos que la interculturalidad consiste en entrar en otra experiencia del mundo.[1]

Cada cultura pregunta y responde desde su contexto y desde su sensibilidad, construyendo un ámbito de significación propio.

[1] DGCyE, Dirección de Primaria Básica, Subdirección Planes, Programas y Proyectos, *Consideraciones acerca de la interculturalidad. Implicancias y desafíos para la educación de la Provincia*. La Plata, DGCyE, 2006.

> La interculturalidad implica reconocer el valor único de cada interpretación del mundo. La actitud intercultural en la educación consiste pues, en crear la conciencia de la interrelación entre persona y entorno, y entre los diversos universos culturales; significa, adoptar como categoría básica del conocimiento la relación.[2]

La escuela trabaja como una institución social con voluntad inclusora e integradora, y con capacidad para albergar proyectos de futuro, aun en los contextos más críticos. Las diversas experiencias educativas desarrolladas en la provincia intentan hallar códigos y significados que encuentren nuevos sentidos a su tarea.

La interculturalidad como concepción y posicionamiento en este Diseño Curricular significa el tratamiento de la diversidad, las visiones de y sobre los otros en los escenarios escolares, los desafíos e implicancias para una pedagogía intercultural, sus límites y potencialidades para la acción escolar.

La primera premisa es: somos y nos constituimos en "sujetos en relación con otros".

En cada escuela y en cada aula, la experiencia educativa se desarrolla en la diversidad, la desigualdad y la diferencia. Su tratamiento dependerá del carácter de las intervenciones y las creencias y valores que las sustentan, es decir, de cómo cada sujeto e institución, crea la imagen de esos otros con los que deben compartir espacios y momentos, y cómo esa imagen repercute en el vínculo pedagógico y social que se crea entre ellos.

> La visión de y sobre los otros define los principales objetivos y contenidos de la escuela, define la enseñanza, la interpretación de las causas de las dificultades escolares y sus posibles soluciones. En consecuencia, genera diversas prácticas educativas, según lo que se considere que es la misión o finalidad de la escuela, y por ende, qué deben hacer los y las docentes, condicionando las ideas sobre por qué aprenden o no aprenden los alumnos/as y en este caso, cómo solucionarlo.[3]

Las diferentes representaciones de y sobre los otros producen respuestas institucionales. Por ejemplo, la asimilación de los otros desde una mirada uniformizante y homogeneizante ha sido una de las respuestas históricas que el sistema educativo ha dado a la diversidad. La asimilación, y no la aceptación de la diferencia, ha traído como consecuencia la anulación, la negación o la invisibilidad de otras prácticas culturales, saberes y experiencias para la imposición de aquello que se considera "superior" o ha logrado instalarse como legítimo.

Otra visión estereotipante es aquella que lee las desigualdades sociales y económicas como diversidades culturales, confundiendo diversidad con desigualdad. Emparentar "diversidad" con "desigualdad", legitima la reproducción de la exclusión y sus consecuencias didácticas se manifiestan, entre otras formas, en el tratamiento diferenciado de los contenidos curriculares. Separar diversidad y desigualdad implica un acto de reconocimiento de que existen prácticas que no son producto de la diversidad de los grupos, sino consecuencias de las desigualdades sociales y económicas, y que dichas desigualdades no sólo no ameritan un tratamiento diferenciado de los contenidos, sino que implican como decisión fundamental concebir que todos tienen el derecho al acceso, la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos que transmite la escuela.

En este sentido, se cuestionan la idea de "tolerancia" –porque implicaría aceptar y compartir con los otros, diferentes, diversos, siempre y cuando nadie cambie de lugar– y la idea de "riesgo educativo", que define el lugar recortado de esos otros que son tolerados. Por lo tanto, las condiciones en las que se producen los procesos institucionales de enseñanza y aprendizaje se ven afectadas para todos los alumnos/as y no sólo los que están supuestamente en riesgo, los que son "tolerados".

Concebir a la escuela como lugar de inclusión de los alumnos, como sujetos de diversidad, afecta directamente la concepción y producción pedagógico-didáctica.

[2] Ibídem, p. 13.

[3] Ibídem, p. 13.

La escuela es uno de los espacios públicos en los que se realizan políticas de reconocimiento. Constituye ese lugar de encuentro intercultural y esto implica:

- generar experiencias de integración e intercambio;
- definir los conocimientos que circulan en cada contexto intercultural en términos escolares;
- valorar la interacción con otros diferentes como productora de aprendizajes;
- reconocer los saberes que posee cada sujeto como instrumento y producto del vínculo con los otros;
- capitalizar la presencia de la diversidad cultural en toda situación educativa y no sólo en algunos grupos;
- crear vínculos entre los sujetos que aseguren que su diversidad y sus diferencias no devengan en desigualdad educativa.

Dichos enunciados acerca de las prácticas escolares, la ciudadanía y la interculturalidad implican reconocer la noción de *sujetos sociales* como el tercer concepto clave para la presente propuesta curricular. En este sentido, tener en cuenta que las prácticas escolares son prácticas que ponen en relación a personas adultas, jóvenes y adolescentes en sus condiciones de docentes y alumnos respectivamente.

En este apartado se ha hecho mención a las particularidades que asumen las prácticas culturales refiriéndose particularmente a los jóvenes. Sin embargo, es preciso recomponer dichos enunciados para dar cuenta de ciertos aspectos fundamentales del Diseño Curricular. En primer lugar, los sujetos sólo pueden intervenir activamente en una relación comunicativa si los otros los reconocen como "portadores" de cultura, valores, hábitos y saberes que son necesarios confrontar con otro grupo de valores y hábitos, como es el que se plantea en la escuela. En este sentido, en la escuela las relaciones comunicativas, por excelencia, son la de enseñanza y la de aprendizaje.

A lo largo de la historia de la educación se han forjado representaciones e imaginarios acerca de los jóvenes y sus prácticas y específicamente de los adolescentes como alumnos/as de la escuela. En estos imaginarios, pueden reconocerse ciertas concepciones que provocan consecuencias en dichos procesos comunicativos.

Así, concebir a los adolescentes como un grupo homogéneo que comparte ciertas características generales propias de su edad acarreó prácticas de selección y discriminación hacia aquellos sujetos que no se comportaban según lo esperado. La idea de la existencia de sujetos "diferentes" en la escuela casi siempre fue considerada en términos negativos: la diferencia era respecto al "modelo ideal" de adolescente, joven y alumno.

Por otra parte, estos "modelos ideales" fueron y son siempre considerados desde un determinado punto de vista: el de los adultos, y esto implica entonces que las diferencias respecto del "ser joven" se establecen tomando como punto comparativo al adulto al cual se lo concibe como la forma más acabada de ser sujeto. Por lo tanto, los adolescentes y jóvenes sólo son interpelados desde lo que les falta para ser adultos: falta de madurez, de hábitos, de cultura, entre otras posibles.

Sin embargo, en la actualidad, los jóvenes y adolescentes expresan cada vez con más fuerza, y en muchos casos con violencia, que no están vacíos: tienen hábitos, prácticas culturales y valores, aunque no sean los que se sostienen en la escuela; y sus expresiones son resistentes y dadoras de identidad al punto de resistir a la imposición de los otros, y a lo que propone la escuela. En este sentido, la escuela sólo le exige al joven su ubicación de alumno y no como joven y adolescente.

No obstante, los estudios de juventud, en relación con la escuela media, muestran que para la mayoría de los jóvenes la escuela es un lugar importante, está muy presente en sus vidas y tiene varios sentidos. Allí, se practica no sólo la relación con los pares generacionales, sino entre los géneros y con otras generaciones, clases y etnias.

A su vez, es la institución que porta el mandato de transmitir a las nuevas generaciones los modelos previos, y no sólo los previos recientes, sino los de hace largo tiempo: se enseña el conocimiento acumulado socialmente, es decir, lo producido por otras generaciones, lo que implica poner en tensión a las generaciones que se relacionan en su ámbito.

La escuela es una institución de relaciones intergeneracionales y les corresponde a los adultos tomar la responsabilidad de la transmisión en su función de docentes, función para lo cual es necesario sostener la ley, mostrando cómo se conoce, a qué normas estamos sometidos y de qué manera intervenimos en ellas como sujetos sociales; ser modelo de identificación. Esto es posible sólo si se descubren los saberes y los no saberes del docente, su placer por el conocimiento; y permitir a los otros fortalecer su identidad, construir nuevos lazos sociales y afianzar los vínculos afectivos. Sólo la convicción del valor social y cultural con que el docente inviste los conocimientos que transmite, transforma aquello que muchas veces, desde la perspectiva de los adolescentes y jóvenes, es un sin sentido en un sentido: la presente propuesta curricular se propone enseñar aquello a lo cual no podrían acceder de otra manera. Los y las docentes asumen la tarea de enseñar como un acto intencional, como decisión política y fundamentalmente ética.

Sobre el lenguaje y el conocimiento en la escuela

El lenguaje es la forma en que los sujetos sociales se expresan, conocen y se reconocen y construyen visiones de mundo.

En este sentido, la escuela incluye sujetos alumnos, docentes, padres, que se expresan a través de distintos lenguajes, propios de la diversidad de hablas, de grupos culturales que deben ser reconocidos en su singularidad y en relación con los demás grupos.

La escuela organiza la experiencia pedagógica a través de materias que recortan un conjunto de conocimientos que provienen de distintos campos: las ciencias, las artes, la educación física, la lengua nacional y las extranjeras. Y estos campos son modos de comprender y pensar el mundo y de constituir sujetos sociales. Las artes, la ciencia y la filosofía, entre otros, pueden de esta manera concebirse como lenguajes a través de los cuales se fortalecen las identidades.

Sin embargo, estos conocimientos que la escuela decide enseñar, legar a las nuevas generaciones requieren de una tarea específica para su transmisión sistemática, para lograr la apropiación de todos los alumnos que concurren a la escuela: esa tarea es la enseñanza.

En este sentido, el lenguaje de la enseñanza debe tener intención de provocar pensamiento ya que esta provocación es el camino de acceso al conocimiento. Cuando el lenguaje de la enseñanza no se entiende, se traza una línea que marca el adentro y el afuera, el "nosotros" y el "los otros".

Cuando el lenguaje de la enseñanza no tiene por intención provocar pensamiento, el acceso a los saberes se ve cercenado a aquellos que comparten ese lenguaje y los que quedan afuera se transforman en los diversos, en los que por hablar otros lenguajes no comprenden el de la escuela y muchas veces "fracasan".

Las diferencias de lenguajes están íntimamente ligadas a las diferencias culturales, pero estas diferencias no deben minimizarse. No basta con hacer un discurso de elogio a la diversidad cultural para asegurarse el éxito escolar de todos los sujetos.

> La "formación escolar" –la que la Escuela pretende dar, la que se puede adquirir en ella– debe hacer entrar a las jóvenes generaciones en las obras de que se compone la sociedad. (Chevallard, 1996).
>
> La creación de saberes es, casi siempre, cosa de unos pocos. Y la transposición de saberes es cosa de una sociedad, y no es una simple transferencia –como se hace con las mercancías – sino, cada vez, nueva creación. El aggiornamento de la Escuela requiere una movilización formidable de energías y competencias: por parte de los maestros, políticos, "sabios", didácticos, y también por parte de la gente que debe reunirse bajo un lema esencial: Saberes para la Escuela. (Chevallard, 1996).

En ese sentido, la historia de la escolaridad obligatoria, gratuita y pública de fines del siglo XIX hasta hoy, tuvo en nuestro país como principal tendencia equiparar igualdad y homogeneidad.

La negación de las diferencias buscaba la construcción de la identidad nacional, unificar el idioma frente a la inmigración, crear la "cultura nacional", poblar; todas cuestiones que formaban parte del proyecto político de la Generación del 80. En ese momento la negación de las diferencias provino de la búsqueda de progreso. Por lo tanto, podría afirmarse que el ocultamiento de las diferencias no siempre estuvo al servicio de la desigualdad: la escuela de la Ley 1.420 logró, hacia mediados de siglo XX, uno de los niveles más altos de escolarización de Latinoamérica.

De la misma manera, el reconocimiento de las diferencias no siempre estuvo ligado a la justicia social. La historia y las condiciones socioculturales contextualizan las diferentes intencionalidades que, con respecto a la diversidad, la desigualdad y la diferencia, han tenido las sociedades humanas.

En este Diseño Curricular se define un recorte de saberes que permite a los docentes producir y comunicar ideas, pensamientos y experiencias para que los jóvenes también alcancen este tipo de producción y puedan expresarlo en la escuela.

Dicho recorte de saberes y conocimientos realizados –la síntesis cultural, tal como se mencionara anteriormente– se encuentra a su vez en tensión. Entre la obligación, como generación adulta, de elegir la herencia cultural que será obligatoria a través de la escuela y el reconocimiento de la diversidad de grupos culturales a los cuales realiza el legado. Esta tensión también puede expresarse entre la igualdad de acceso al patrimonio cultural de la humanidad y el respeto a la heterogeneidad de sujetos y grupos sociales y culturales y, a su vez, como tensión intergeneracional.

En el apartado que sigue se desarrollan las bases para el currículo del Ciclo Básico de la Secundaria y en una etapa próxima se hará respecto del Ciclo Superior. Es preciso dejar claro que esta división de la Escuela Secundaria en dos ciclos responde a la centralidad que se le otorga a los sujetos, los alumnos, antes que a aspectos meramente técnicos. La Escuela Secundaria está dividida en dos ciclos porque recibe niños que ingresan a la adolescencia y devuelve a la sociedad, seis años después, ciudadanos que deberán ejercer plenamente sus deberes y derechos. En el ingreso y en el egreso es necesario respetar rituales, sentimientos, representaciones de los adolescentes y jóvenes. Durante el transcurso de los dos ciclos de la Educación Secundaria se garantiza la continuidad curricular, a la vez que la diferenciación relativa de los objetivos de cada uno.

La organización técnica del Diseño Curricular para la Educación Secundaria

El Diseño Curricular del Ciclo Básico de la Secundaria se orienta hacia la búsqueda y la propuesta de soluciones pedagógicas, institucionales y didácticas para la compleja relación de los adolescentes con el aprendizaje, en su pasaje de la infancia a la adolescencia, respecto a la función de los nuevos saberes en la búsqueda de su identidad juvenil. En ese marco, atender los problemas de la exclusión y el fracaso es la preocupación central y el objetivo prioritario. Esto implica dar cuenta, tanto en el enfoque de enseñanza como en los contenidos (su selección y enunciación), de aquello que debe suceder, de qué manera se va a utilizar lo que los adolescentes ya saben, aun cuando no sea lo esperable para un alumno que ingresa a 3º año de la ES, y el tipo de prácticas de enseñanza y evaluación que vayan en dirección al cumplimiento de la inclusión en una propuesta educativa exigente.

Hacer un diagnóstico de lo que no saben y confirmar o proponer sólo los cortes y rupturas que implican entrar a la ES, puede dar lugar a la ubicación de los alumnos/as en el lugar del fracaso si el diagnóstico es sólo dar cuenta de lo que no pueden. Trabajar desde lo que se sabe, y no desde lo que se ignora, propone una enseñanza que articule los saberes de los sujetos con los conocimientos y saberes que el Diseño Curricular prescribe como mínimos, pero no como límite.

Por su parte, la dimensión normativa del Diseño Curricular tiene valor de compromiso como lugar en donde se prescribe lo que hay que enseñar y cómo hay que hacerlo para garantizar los propósitos del ciclo y, por lo tanto, es el lugar al que debe volverse para controlar, garantizar, evaluar si se está cumpliendo y para realizar los ajustes necesarios para optimizar su implementación. El Diseño Curricular tiene valor de ley.

Este mismo compromiso y esta legalidad deben portar también su naturaleza efímera. La validez y la pertinencia científica, así como la social, exigen que se le ponga límite a la vigencia del Diseño. Los alumnos merecen acceder a una cultura siempre actualizada. En este caso, se ha decidido que esta vigencia se ajuste y se renueve cada cinco años porque se espera que en ese lapso la propuesta sea superada porque los alumnos sepan más y mejores cosas que permitan o exijan la modificación del Diseño y porque acontezcan otras cuestiones en los campos del saber y de la cultura.

En otros términos, el Diseño Curricular es una propuesta de trabajo a futuro que prescribe un horizonte de llegada, no de partida, para lo cual es imprescindible realizar revisiones constantes en las prácticas institucionales de directores/as y docentes, en las prácticas de supervisión y de asesoramiento y en la conducción del sistema en el nivel central.

Principales criterios técnicos

Las decisiones técnicas sobre el Diseño surgen de la información relevada para producir el Prediseño Curricular, que incluyó el posterior monitoreo y la asistencia técnica para su implementación. En este proceso, también deben contemplarse el trabajo de escritura que realizaron los autores y el aporte de lectores expertos. Como es propio de este tipo de construcción, se produjeron tensiones entre lo que demandó cada uno de estos actores: qué se escribe, qué no se escribe, cuáles son los criterios correctos o deseables desde la disciplina a enseñar desde su didáctica, qué prácticas docentes caracterizan la enseñanza en el nivel educativo, cuál es el alejamiento que produce la lectura de "marcas de innovación" en el texto curricular, fueron preguntas que atravesaron el proceso de producción curricular. Así, las decisiones técnicas a las que se arribó son las siguientes:

- Las conceptualizaciones y los paradigmas, que en diseños anteriores constituían los ejes transversales, se presentan ahora como fundamentos para orientar los componentes que constituyen el Diseño Curricular. Son las líneas de pensamiento que comprometen la concepción de educación en su conjunto y que se encuentran en la orientación, el enfoque y la selección de los contenidos de cada una de las materias que componen el currículum.
- Las materias que componen el currículum de la ES están organizadas en disciplinas escolares. Esto quiere decir que son definiciones de temas, problemas, conocimientos que se agrupan y se prescriben con el propósito de ser enseñados en la escuela. Por fuera de este ámbito, dicho recorte, selección y organización, no existiría.
- Para algunas materias la denominación coincide con la denominación de una ciencia, de una disciplina científica, como es el caso de Matemática. En otras, las denominaciones no responden a ninguna denominación vinculada a la ciencia, sino a algún ámbito o campo de conocimiento como ocurre en Educación Física, Educación Artística e Inglés. En el caso de Prácticas del Lenguaje se parte de la lengua como ámbito o campo de conocimientos, pero se lo denomina a partir del enfoque para su enseñanza, es decir, el nombre de la materia responde a su organización escolar.
- La denominación "área" o "disciplina" no se considera para este Diseño Curricular, ya que la denominación disciplinar responde a motivos epistemológicos y la areal a motivos organizacionales y, por lo tanto, no constituyen una tensión real sobre la cual sea preciso tomar una decisión técnico-curricular. En ambos casos, se trata de materias (asignaturas) que expresan, a partir de su denominación, el recorte temático para su enseñanza realizado de la disciplina o las disciplinas que las componen.
- Al interior de cada materia aparecen diferentes componentes organizadores de contenidos.
    - Los ejes aparecen como organizadores que ordenan núcleos temáticos con criterios que se explicitan y que se vinculan con el enfoque que para la enseñanza se ha definido para cada materia.
    - Los núcleos temáticos aparecen como sintetizadores de grupos de contenidos que guardan relación entre sí.
- Para cada materia se definió una organización específica de acuerdo con el recorte temático en vinculación con la orientación didáctica, de manera tal que la definición de contenidos no sería la misma si se modificara el enfoque de la enseñanza. Como consecuencia de tal imbricación, cada materia definió su estructura, diferente de las otras ya que, desde este criterio, no podría homogeneizarse la manera de diseñar cada tránsito educativo.

- A nivel nacional se define como estructura curricular básica una matriz abierta que permite organizar y distribuir en el tiempo los contenidos a enseñar en un tramo del sistema educativo, de acuerdo con reglas comprensibles. Cabe señalarse que dicha estructura no agota el Diseño, sino que organiza parte del plan de estudios.
- Como estructura curricular de este Diseño se decidieron algunas categorías de organización para todas las materias, pero que no comprometen ni ejercen influencia para la definición de su estructura interna. Dichas categorías son:
  - La enseñanza de la materia en la Educación Secundaria Básica.
  - Expectativas de logro de la materia para 3º año.
  - Estructura de organización de los contenidos.
  - Orientaciones didácticas.
  - Orientaciones para la evaluación.
- Las expectativas de logro siguen siendo el componente que expresa los objetivos de aprendizaje. En este Diseño se definen para 3° año (ES) y por materia. Describen lo que debe aprender cada alumno/a alcanzando niveles de definición específicos, de manera tal que se vinculen claramente con los contenidos, las orientaciones didácticas y las orientaciones para la evaluación en cada materia.
- Las orientaciones didácticas sirven de base para la definición de logros de enseñanza que se vinculan con las expectativas con respecto a los aprendizajes, con el objeto de resaltar la relación de dependencia entre los desempeños de los docentes y de los alumnos.
- La vinculación entre los contenidos y las orientaciones didácticas se define a partir de conceptualizar que la manera de enunciar los primeros condiciona las segundas. Es decir, el modo en que se presentan los contenidos da cuenta de cómo deben ser enseñados. De esta manera, se ha buscado especificar el trabajo que se espera con cada bloque de contenidos para lo cual se ha decidido incluir ejemplos y propuestas.
- La vinculación de las orientaciones para la evaluación con las orientaciones didácticas y con las expectativas de logro (tanto de enseñanza como de aprendizaje) tiene por intención alcanzar precisión con respecto a la relación entre los alcances obtenidos por los alumnos durante el proceso de aprendizaje y los alcances de las propuestas realizadas por los docentes durante el proceso de enseñanza.
- La vinculación de las orientaciones para la evaluación con las expectativas de logro (tanto de enseñanza como de aprendizaje) y con los contenidos, también tiene por intención constituirse en instrumento para la conducción y la supervisión institucional, tanto de directores como de supervisores.
- Las decisiones que se tomaron para el diseño de cada materia, en cuanto a cada uno de sus componentes, especialmente para con los ejes, los núcleos temáticos y los contenidos se confrontan con el tiempo teórico disponible para la enseñanza, que se obtiene de la multiplicación de las horas semanales de cada materia por el total de semanas en nueve meses de clases. Dicha carga horaria total ideal/formal funcionó como otro parámetro de ajuste "cuali-cuantitativo" de la organización curricular de cada materia.
- El currículum diseñado se define como prescriptivo, paradigmático y relacional.
  - Prescriptivo, porque cada materia define los contenidos que deberán enseñarse en el año teniendo en cuenta la articulación conceptual definida como fundamento y dirección en el marco teórico inicial.
  - Paradigmático, porque como fundamento y toma de posición se definen categorías que orientan, articulan y dan dirección a las nociones y conceptos que se usan en todas y cada una de las materias y que se consideran definitorias para la propuesta educativa del nivel.
  - Relacional, porque las nociones elegidas guardan vínculos de pertinencia y coherencia entre sí.

Mapa curricular del plan de estudios de 3º año

MATERIA	ESTRUCTURA DE CONTENIDOS	
	EJES	NÚCLEOS SINTÉTICOS DE CONTENIDOS
MATEMÁTICA	Geometría y Magnitudes	Figuras planas - Transformaciones en el plano - Teorema de Tales - Figuras semejantes - Homotecias - Trigonometría - Medida
	Números y Operaciones	Números racionales - Números reales
	Introducción al Álgebra y al estudio de las Funciones	Trabajo con expresiones algebraicas - Funciones: fórmulas, tablas y gráficos - Estudio de funciones
	Probabilidades y Estadística	Estadística, Análisis descriptivo - Combinatoria - Probabilidad

Estructura curricular

3° año de Educación Secundaria (SB)	
Matemática	4 módulos semanales

Matemática

3º año (ES)

La enseñanza de la matemática en la ES

Si bien la matemática tiene carácter formal, organización axiomática y naturaleza deductiva, desde sus orígenes ha progresado recurriendo a la intuición, al pensamiento conjetural y a las aproximaciones de naturaleza inductiva. Una gran parte de los conceptos matemáticos nacieron como respuestas a preguntas surgidas de problemas vinculados con lo cotidiano o con otras ciencias.

Los problemas son los que le dan sentido a la matemática. Presentar las nociones matemáticas como herramientas para la resolución de problemas, propicia que los alumnos les encuentren sentido. Esas nociones podrán luego ser estudiadas por sí mismas, fuera del contexto en el que se las presentó, lo que les aportará nuevos significados y brindará a los alumnos la posibilidad de realizar transferencias.

Posiblemente debido a las situaciones experimentadas por las personas durante su tránsito por la escuela, la Matemática es percibida frecuentemente como un sistema de ideas abstractas comprensibles solo para quienes cuentan con determinadas condiciones intelectuales. Es posible que esta percepción surja como resultante de presentaciones rígidas de los contenidos, por completo descontextualizadas. En este marco, es frecuente que los alumnos realicen esfuerzos para recordar y repetir procedimientos relacionados con conceptos matemáticos, en general aislados entre sí y vacíos de significado.

El tipo de trabajo que se desarrolla dentro del aula marca la relación de cada alumno con la matemática y favorece, o no, el cambio de estas percepciones que han devenido tradicionales.

Un desafío que se plantea a quienes enseñan esta materia es lograr que los alumnos descubran que la Matemática es un quehacer para todos. La presentación de situaciones que estén al alcance de todos suele ser un camino para devolver a los alumnos la confianza en sus posibilidades de hacer matemática.

Hacer matemática es, básicamente, resolver problemas, ya sea que provengan del interior o del exterior de la misma. En tercer año, la resolución de problemas y el posterior análisis de lo realizado, continuará ocupando un lugar central en la actividad matemática del aula.

Es decir, la sola resolución de problemas no es suficiente para la construcción de conocimientos transferibles a situaciones nuevas. Es necesaria la reflexión sobre lo realizado, la comparación de los distintos procedimientos de resolución utilizados; la puesta en juego de argumentaciones acerca de la validez de los procedimientos llevados a cabo y de las respuestas obtenidas y la intervención del docente para que establezca las relaciones entre lo construido y el saber matemático y para que formalice el conocimiento construido por el alumno.

A su vez, la actividad de resolver problemas y fundamentar las soluciones construidas fortalecerá la disposición para enfrentar situaciones nuevas en forma autónoma, así como la constancia necesaria para resolverlas.

En el presente Diseño Curricular para la enseñanza de la matemática en la ES, cuando se menciona la palabra *problema* no se hace referencia a la ejercitación que afianza aprendizajes logrados, sino a una situación en la que el alumno, al poner en juego los conocimientos que ya posee, los cuestiona y los modifica generando nuevos conocimientos. La resolución de un problema matemático requiere que el alumno pruebe, se equivoque, recomience a partir del error, construya modelos, lenguajes, conceptos, proponga soluciones, las defienda, las discuta, comunique procedimientos y conclusiones. Esto quiere decir que cuando se plantea una determinada situación (matemática o extra-matemática) a los alumnos, debe considerarse que si han podido resolverla inmediatamente –con la reserva de conocimientos disponibles– o si el significado de la misma está más allá de sus posibilidades de interpretación, esa situación no constituye un problema para ellos. Para ser tal, un problema debe poderse interpretar con la red de significación construida por el alumno, pero debe plantearle un desafío. Si el desafío no existe o es de un grado de dificultad muy alto, la situación corre riesgo de ser sencillamente ignorada por el destinatario.

Una situación se transforma en problema cuando el alumno lo reconoce como tal y decide hacerse cargo de él. Su respuesta inicial puede ser, por ejemplo, la propuesta de una estrategia de resolución a partir de sus conocimientos anteriores, pero esto no debe ser suficiente para dar solución al problema. Es necesario que el alumno pueda realizar modificaciones en su sistema de conocimientos para resolver la situación propuesta y generar un nuevo conocimiento matemático.

El docente deberá diseñar secuencias didácticas que presenten desafíos que los alumnos sean capaces de aceptar, de modo que, a través de la resolución de los problemas involucrados, puedan afianzar conocimientos matemáticos ya construidos y construir conocimientos nuevos.

Como ya se señaló en los Diseños Curriculares de los dos primeros años de la ES, las situaciones que se planteen en las clases de Matemática deberán aprovecharse para analizar de qué forma los alumnos hacen funcionar los conceptos en la resolución de los problemas, así como la forma en que establecen generalizaciones.

Se deberán plantear además problemas que hagan referencia a cuestiones internas de la matemática como, por ejemplo, la generalización de patrones y de términos de una serie, el trabajo algebraico para la construcción de fórmulas, el análisis de funciones, la reflexión acerca de la información que arroja el cálculo estadístico o probabilístico, entre otros.

Tercer año representa el final de un ciclo y, a su vez, el prólogo de otro que abarcará los tres últimos años de la educación secundaria. Por esa razón, se espera que se afiancen los conocimientos matemáticos construidos por los alumnos en los dos primeros años de la ES mediante su uso en situaciones que enriquezcan su significado y que permitan el tratamiento de conceptos nuevos que fortalezcan y amplíen su formación matemática.

Los conceptos matemáticos construidos se retomarán, analizando aspectos de los mismos que, por diferentes razones, aún no hayan sido abordados.

Una mirada distinta de los contenidos de este primer ciclo de la educación secundaria resulta de fundamental importancia para la futura inserción de los alumnos en las etapas siguientes de la educación formal.

En los dos primeros años de la ES los alumnos comenzaron a transitar el camino que une la aritmética con el álgebra y se aproximaron a las formas que utiliza la matemática para justificar sus afirmaciones. En este 3º año los alumnos deberán consolidar estas cuestiones.

El pasaje de la aritmética al algebra, así como la aproximación a las formas de argumentación matemáticas, suponen cambios cualitativos en las formas de razonamiento de los alumnos que no son inmediatos y que requieren de tiempos diferentes para cada uno.

Resultará conveniente que los alumnos consulten libros de matemática en forma habitual, pero algunos de ellos pueden presentar dificultades a los lectores/as no habituados al lenguaje simbólico o a las expresiones coloquiales o gráficas del ámbito de la matemática. Por esta razón es importante la utilización de los mismos en clase con la ayuda del docente y aprovechando variedad de propuestas editoriales para comparar el tratamiento de los temas.

Por otra parte, y al igual que en los años anteriores, se recomienda insistir en la necesidad de estudiar de manera reflexiva no memorística, ya que esto permite tener disponibles los conceptos y las estrategias construidas para la resolución de nuevos problemas. Esta forma de estudio le permitirá al alumno estar en condiciones de establecer autónomamente la pertinencia del uso de los conceptos y estrategias en la resolución de las situaciones nuevas que el docente plantee.

Enseñar matemática en tercer año de la ES

La línea de trabajo propuesta por este Diseño Curricular para la enseñanza de la matemática en 3º año de la ES considera cuatro cuestiones relevantes en la tarea: las intervenciones del docente, los errores del alumno, la carpeta del alumno y las estrategias de evaluación.

Las intervenciones del docente

Al comenzar el año el docente podrá proponer actividades en las que se deban analizar patrones para detectar regularidades, formular conjeturas acerca de las mismas, construir argumentos que las justifiquen y formular todo esto por escrito. Es importante que se continúe promoviendo la adquisición de formas de expresión cada vez más claras y precisas, tratando de que las mismas se aproximen progresivamente a las formas de expresión simbólica propias de la matemática. Esto deberá realizarse sin perder de vista que esta adquisición es lenta y compleja y no todos los alumnos la lograrán en el mismo momento, ni a la misma edad, aunque concurran a determinada escuela o compartan una misma aula. Todos los alumnos necesitan la atención del docente y en ocasiones se hacen imprescindibles intervenciones personalizadas.

Será importante ofrecer a los alumnos situaciones que en sí mismas provoquen la necesidad de escribir expresiones generales y que a su vez requieran de la expresión simbólica de las mismas como solución. Los alumnos solo comprenderán la necesidad del álgebra cuando sean conscientes de la limitación de los procedimientos no algebraicos para la resolución de determinados problemas.

Durante 3º año, y como consecuencia del estilo de trabajo que se ha desarrollado en 1º y 2º año, los alumnos deberán adquirir una mayor autonomía para la realización del trabajo propuesto por el docente. En este sentido es posible que los jóvenes encuentren soluciones a determinadas situaciones proponiendo formas de resolución diversas y más extensas de lo esperado. Además, al iniciar el trabajo matemático desde esta perspectiva, es posible que aún no consideren necesaria la búsqueda de las soluciones más económicas. El objetivo que persiguen es la solución, sin profundizar en el análisis del camino seguido ni la forma de comunicarlo. Por esta razón, y teniendo esto en cuenta, el docente deberá proponer a sus alumnos dicho análisis, de modo que ellos puedan advertir por sí mismos cuáles son los pasos superfluos de sus desarrollos y de qué forma estos restan claridad a sus exposiciones. Trabajará con ellos para que logren formas de resolución lo más económicas que les sean posibles, en términos de procedimientos, y formas de expresión (no necesariamente simbólicas) cada vez más claras y comunicables. Será adecuado crear espacios para que este tipo de registros se construyan entre todos, por ejemplo en el pizarrón y con ayuda del docente, para luego registrarlos en las carpetas.

El docente deberá seleccionar o elaborar situaciones que permitan a los alumnos la construcción de nuevos conocimientos matemáticos. Deberá, además, tener en cuenta que la sola reunión de los alumnos con una propuesta de trabajo planificada no producirá necesariamente el aprendizaje de lo que pretende enseñar, por lo que su intervención pertinente resultará imprescindible para el adecuado desarrollo de las clases.

El docente definirá si la tarea se realizará en forma individual o grupal, si habrá un primer momento de trabajo individual para luego continuar la tarea en grupos, si habrá puesta en común o cierre y en qué momento de la clase se realizará cada tarea. Actuará como coordinador de la clase, acompañando a sus alumnos durante su tarea, en un delicado equilibrio entre ayudar y abstenerse de interferir con el trabajo autónomo que aquellos deben desarrollar para resolver los problemas propuestos.

La función del docente dentro del aula es enseñar Matemática y sus intervenciones constituyen la esencia del proceso. Deberá favorecer la formación de un ambiente en el que los alumnos encuentren las condiciones adecuadas para el quehacer matemático.

Para ello les brindará la posibilidad de explorar, conjeturar, volver con una mirada crítica sobre las actividades que se vayan desarrollando, procesar la información y obtener de ella los datos para resolver los problemas, diseñar técnicas y estrategias para obtener soluciones, detectar errores proponiendo momentos de autoevaluación y discutir sus producciones con sus compañeros.

Las discusiones entre pares constituyen una etapa de la comprensión matemática y un punto de partida para la formalización de los conceptos. Además, promueven en el alumno la necesidad de buscar argumentos sólidos para sostener sus hipótesis en el intercambio entre pares. El docente deberá estar atento a lo que dicen los alumnos en estas discusiones, ya que las mismas dan la posibilidad de tomar contacto con los conocimientos y los errores de los participantes.

Durante el trabajo de los alumnos las intervenciones del docente tenderán a redireccionarlos, cuando sea necesario, hacia los objetivos que se haya planteado. Si los alumnos plantearan cuestiones anexas a aquellos objetivos, el docente tomará nota de las mismas e indicará que se trabajará con ellas más adelante. En otros casos, deberá ayudar a los jóvenes a descartar aquellos planteos que nada tengan que ver con la propuesta, lo que no significa que él también los descarte, ya que podrá retomarlos posteriormente. En cualquiera de estas dos situaciones deberá retomar el tema principal para que los alumnos continúen trabajando.

Ante las consultas de los estudiantes sobre la validez de las expresiones matemáticas construidas, el docente sostendrá cierta incertidumbre momentánea promoviendo el análisis de aspectos que aquellos aún no hayan advertido con el objeto de que la construcción de conocimiento de los alumnos se fortalezca analizando los puntos cuestionables de la misma. En el momento de la clase previsto para la puesta en común de las producciones de cada uno de los grupos, propondrá a la clase completa la discusión sobre el valor de verdad de las cuestiones planteadas en el trabajo previo.

Intervenciones docentes que contengan expresiones como "pensá bien", "seguí pensando" o "¿estás seguro?", lejos de mantener la incertidumbre momentánea, en el sentido expresado en el párrafo anterior, promueven desconcierto, por lo que deberían reemplazarse. Con expresiones de este tipo se podría conseguir, en algunos casos, que el alumno presuma (a veces en forma errónea) que lo que pensó, dijo o hizo está mal y que debería descartarlo, cuando quizás sus desarrollos podrían reformularse con una mínima ayuda del docente. Esta participación no solucionará la problemática propuesta, pero contribuirá para que los alumnos logren esa solución por sí mismos.

Sin dar la respuesta, el docente podrá intervenir con expresiones como:

- "¿pensaste en esto...?", y sugerir algún camino para la solución;
- "¿te acordás cuando hicimos...?", y volver sobre trabajos anteriores que, si bien no resuelven directamente la cuestión planteada en ese momento, representan un punto de partida para utilizar como herramienta algo construido anteriormente;
- "¿qué sucede si consideramos el caso…?", y presentar contraejemplos de las hipótesis planteadas;
- "lo que estamos tratando de hacer...", y dar ejemplos de lo que se busca;
- "mirá lo que proponen...", y sugerir el análisis comparativo con propuestas de otros alumnos;
- "pero el enunciado decía...", y realizar una relectura del enunciado para el análisis y la reflexión.

Estas expresiones (u otras del mismo estilo) utilizadas en el momento adecuado, colaborarán con el trabajo de los alumnos promoviendo la reflexión y brindándoles un nuevo impulso para continuar con la resolución.

Para poder brindar la ayuda adecuada, el docente deberá escuchar las explicaciones de sus alumnos para averiguar, a través de ellas, el estado de situación en el que se encuentran en relación con la comprensión del problema propuesto, cuáles son las cuestiones que ya han logrado resolver en forma adecuada y cuáles son los errores que han cometido hasta el momento.

Es importante recordar que se ha expresado que la acción de sostener la incertidumbre debe ser "momentánea" y debe agregarse "el tiempo necesario". Si el docente advirtiera que el alumno ha llegado a la meta propuesta deberá informárselo, para evitar su desorientación.

Si el docente observara que la tarea de algún alumno o grupo se encuentra obstaculizada deberá acercarse y entablar un diálogo que le permita descubrir las razones y brindar cierta información para que la tarea se reanude. Esto no significa resolver los problemas propuestos, sino, por ejemplo, recurrir a preguntas orientadoras, a una nueva lectura de la situación, a la evocación de situaciones anteriores que tengan relación con el problema.

En la resolución de los problemas propuestos, los alumnos deberán justificar los procedimientos realizados utilizando los conocimientos disponibles y realizando razonamientos pertinentes. Las intervenciones del docente durante la acción emprendida tenderán a contribuir con el trabajo a realizar por el alumno y, principalmente a instalar el lenguaje matemático para la comunicación.

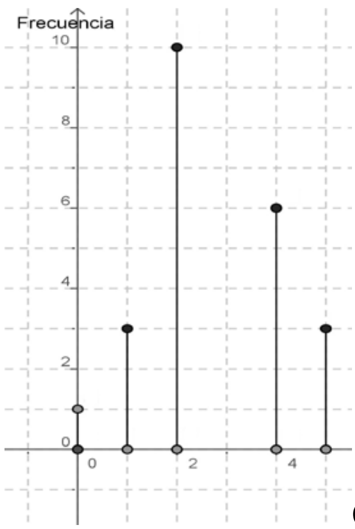
No todos los grupos ni todos los alumnos tendrán el mismo ritmo de trabajo en Matemática. Es fundamental que el docente respete el ritmo y el tiempo que cada uno de ellos necesite para resolver las situaciones propuestas. A su vez, deberá promover el respeto por los propios ritmos y tiempos, así como los que requieran sus compañeros.

Al diseñar una secuencia didáctica, el docente deberá prever posibles errores y respuestas de los alumnos. Esto le permitirá anticipar sus intervenciones durante el trabajo en el aula, así como las cuestiones a considerar en la puesta en común o en el cierre. El posterior análisis de la distancia entre estas previsiones y lo que realmente haya sucedido brindará elementos a tener en cuenta para la preparación de propuestas futuras y para la previsión de intervenciones más ajustadas.

Las situaciones de puesta en común constituyen otra estrategia de enseñanza de la construcción de argumentaciones sobre la validez de las resoluciones realizadas por los alumnos. El docente, en el momento que considere apropiado, organizará una puesta en común de las conclusiones obtenidas por aquellos compañeros. Procurará que los estudiantes muestren a sus compañeros la validez de sus desarrollos con argumentos sólidos. Para ello será preciso que sus intervenciones habiliten la palabra de todos los alumnos en distintos momentos, de manera que no se aprecien unas propuestas sobre otras. El alumno deberá estar seguro de que determinada solución es mejor que otra y deberá poder argumentar el porqué.

De la puesta en común en la que se confronten distintas soluciones correctas, el docente deberá extraer aquello que las relaciona. Un estilo de problema en el que la puesta en común de las producciones cobra especial sentido es el siguiente:

El presente gráfico muestra los resultados de una encuesta realizada a un grupo de familias a las que se les preguntó por la cantidad de hijos. En el mismo se olvidó graficar el bastón correspondiente a 3 hijos:



Cantidad de hijos

Sabiendo que la moda es 2 y la mediana 3, ¿cuántas familias podrían haberse encuestado?

Este es un problema en el que la puesta en común resulta fundamental dado que es posible, de acuerdo con la estrategia utilizada por los alumnos, que diferentes grupos obtengan diferentes respuestas y todas sean correctas. La puesta en común pondrá esto de manifiesto y permitirá, además, proponer un nuevo desafío: encontrar todas las soluciones correctas del problema.

El docente establecerá el estatus matemático de las construcciones de los alumnos. Mostrará que el concepto que se estuvo construyendo tiene un nombre y una simbología particular y establecerá que a partir de ese momento se lo llamará de ese modo y que se incorporará dicha simbología.

Mostrará además las relaciones que tiene con lo que los alumnos ya conocen, explicando que esto es lo que ha posibilitado distintas propuestas de solución del problema. Organizará un registro en las carpetas de los alumnos, para que lo tengan disponible para estudiar. Finalmente propondrá la resolución de nuevos problemas y/o ejercicios que favorezcan la construcción de sentido del concepto que se está trabajando a través del reconocimiento de nuevas situaciones en las que es utilizable y los límites de su aplicación.

El proceso de reflexión del docente acerca de lo que enseñará a sus alumnos y la manera en la que habrá de hacerlo clase a clase es indispensable para establecer líneas generales (planificación a largo plazo) o particulares (planificación a corto plazo) del trabajo que se llevará a cabo en determinado período. Esta tarea podrá llevarse a cabo construyendo un libro de bitácora o diario del docente, para lo que bastaría llevar un cuaderno para cada uno de los grupos que atienda.

En ese diario podrá anotarse también la forma en que los alumnos progresan en la construcción de conocimientos matemáticos, la naturaleza de sus errores, el ritmo de trabajo de cada uno, evaluaciones personalizadas acerca de la evolución del desempeño personal, que brinden al docente elementos para la construcción de las calificaciones, así como argumentos para el diálogo que entablará con ellos y con los adultos responsables en las instancias correspondientes. En tal sentido las producciones de los alumnos brindan información al docente y material de trabajo para otras oportunidades.

Acerca de los errores

La previsión de los posibles errores que podrían cometer los alumnos en la resolución de las situaciones planificadas para la clase permitirá al docente anticipar estrategias para intervenir durante la misma. Los errores no deben ser considerados como ausencia de conocimiento sino como la expresión de un determinado estado de conocimiento matemático que necesita ser revisado en algún sentido. La superación de estos errores no se logrará mediante la imposición del saber. Será necesaria una planificación de acciones tendientes a que los alumnos tomen conciencia de ellos y puedan hacerse cargo de su reparación o ajuste. Para ello será menester poner en acción actividades en las que deban ponerse en juego los conocimientos matemáticos que el alumno posea, de manera que si los mismos tuvieran aspectos para corregir, estos se pongan en evidencia al tratar de resolverlas.

Es importante diferenciar entre errores y conocimientos incompletos. Los primeros imponen la necesidad de una reconstrucción; en cambio, si el conocimiento se encuentra aún incompleto, el alumno deberá construir lo que le falta y el docente deberá brindarle el tiempo y la ayuda que necesite para hacerlo. Esta diferenciación no siempre es sencilla. El diálogo con el alumno en relación con la resolución de determinado problema matemático resultará más valioso a la hora de detectar su situación e intervenir en consecuencia que esforzarse porque el estudiante logre adquirir determinado conocimiento mediante repetidas explicaciones aisladas. Es muy probable que, para dejar conforme al docente, el alumno termine por repetir de memoria lo que este trata de explicarle; en este sentido se considera conveniente que en ocasiones el docente muestre determinados desarrollos erróneos para que se analicen en el grupo completo de clase, con el objeto de ponerlos sobre el tapete porque constituyen cuestiones que se presentan en más de un pequeño grupo de trabajo o porque la experiencia del docente le permite prever su aparición de manera sistemática.

Por ejemplo, uno de los errores que habitualmente cometen los alumnos es el uso de la noción de proporcionalidad para el cálculo de la variación del perímetro o del área de una figura en la que se modificaron sus dimensiones. Es común que los alumnos sostengan, sin dudar, que si los lados de un rectángulo se duplican ocurrirá lo mismo con el perímetro y el área. Por ello, será necesario poner esto en cuestión, es decir, proponer un análisis minucioso para que puedan superar este supuesto.

A continuación se ofrece un ejemplo para trabajar esta dificultad luego de detectarla en clase:

Ejemplo 1:

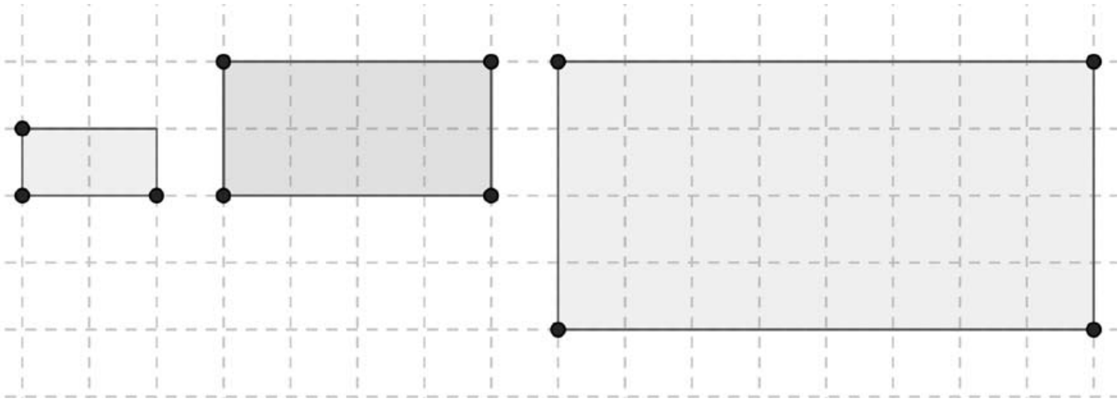
Completar en la siguiente tabla el perímetro y el área de los rectángulos cuyas dimensiones se indican en las dos primeras columnas. Analizar los resultados obtenidos:

Medida de la base (en cm.)	Medida de la altura (en cm.)	Perímetro (en cm.)	Área (en cm.^{2})
5	3	2(5+3) =16	5 x 3=15
↓ x 2	↓ x 2	↓ x 2	↓ x 4
10	6	2 (10 +6) =32	10 x 6 =60
↓ x 2	↓ x 2	↓ x 2	↓ x 4
20	12	2 (20 +12) =64	20x12=240
↓ x 2	↓ x 2	↓ x 2	↓ x 4
40	24	128	40 x24= 960

La tabla se presenta completa solo a los efectos de este ejemplo, la misma se presentará a los alumnos con determinadas celdas en blanco que permitan poner de manifiesto los conocimientos que ponen en juego para completarla.

Una vez completa la tabla, los alumnos podrán analizar los resultados obtenidos y formular conclusiones en relación con ellos. Estas deberán ser puestas en cuestión con las conjeturas planteadas previamente para analizar la validez de las mismas. Las conclusiones podrán ser expresadas inicialmente en lenguaje coloquial por ejemplo: “cuando se duplican las medidas de ambos lados del rectángulo, el perímetro también se duplica y el área se cuadruplica”.

La visualización resultará un apoyo importante a partir del cual se pueden pensar las justificaciones y enriquecerá las conclusiones obtenidas con la tabla:



El docente deberá proponer a los alumnos que intenten generalizar y expresar sus conclusiones en lenguaje simbólico. Para ello podrá agregar en la tabla las siguientes filas y pedir que completen las celdas vacías:

Medida de la base (en cm.)	Medida de la altura (en cm.)	Perímetro (en cm.)	Área (en $cm.^2$)
a	b		
↓	↓	↓	↓
x 2	x 2		
....	....		

Se podrían extender estas conclusiones a la multiplicación de la medida de los lados de la figura por un número distinto de dos. Por ejemplo:

Medida de la base (en cm.)	Medida de la altura (en cm.)	Perímetro (en cm.)	Área (en $cm.^2$)
5	3		
↓	↓	↓	↓
x 3	x 3		
15	8		
↓	↓		
x 4	x 4		
60	36		
↓	↓		
x 5	x 5		
300	180		

Y generalizar lo observado para la multiplicación de los lados de la figura por un número n cualquiera:

Medida de la Base (en cm.)	Medida de la altura (en cm.)	Perímetro (en cm.)	Área (en cm.^{2})
a	b	2 a + 2 b	a x b
na	nb		

Así se comprobará que si las medidas de ambos lados de un rectángulo se multiplican por el mismo número, el área se multiplica por el cuadrado de ese número y el perímetro se multiplica por el mismo número por el que se multiplican los lados.

La carpeta de trabajo de los alumnos

En Matemática, la carpeta de los alumnos deberá ser objeto de periódica revisión por parte del docente, pero esta revisión deberá avanzar más allá de la verificación de que la misma esté completa: en las carpetas de los alumnos hay importante información acerca de la marcha del proceso de enseñanza y de aprendizaje.

Para estudiar para una prueba de Matemática, resulta de poca utilidad una carpeta en la que solo se encuentren actividades fotocopiadas y escuetos esbozos de solución de esas actividades en notas marginales o entre renglones.

Deberá ponerse especial cuidado en desarrollar en los alumnos la capacidad de autoevaluar su trabajo tratando de determinar dónde se han producido diferencias respecto de las respuestas correctas y si estas diferencias constituyen errores. Es decir, es necesario que el alumno comprenda que su trabajo es valioso aunque contenga errores, por lo que no debe proceder a desecharlo o borrarlo cuando no coincida con lo que se presenta como resolución correcta en la puesta en común. El docente podrá sugerir que, a continuación de su producción, el alumno reescriba las conclusiones a las que se haya arribado en la puesta en común, o que enriquezca su resolución registrada en la carpeta con aquellos detalles que hayan estado presentes en la tarea colectiva y que estén ausentes en su trabajo personal.

En ocasiones, el alumno podría no entender por qué su producción no es correcta. En ese caso, será necesaria la intervención del docente para brindarle ayuda en este sentido. Estas intervenciones podrán realizarse aun cuando las producciones presenten dificultades en cuanto a su comunicabilidad. Frecuentemente los alumnos utilizan formas personales de representación del trabajo que están realizando, a menudo en un desorden en el que es difícil advertir la forma en que llegaron a la solución de un problema. Una tarea que resulta indispensable en la actividad matemática es construir formas de representación de las estrategias de resolución que sean comunicables (en este caso, al grupo y al docente). Por lo tanto, respetando las estrategias de registro que cada alumno utilice, será necesario trabajar sobre ese registro para darle una forma ordenada y lógica que pueda ser comprendida por todos.

Además de lo expresado es importante trabajar con los alumnos el registro de las intervenciones del docente que consideren importantes (sean estas realizadas hacia la clase en general o en particular hacia cada alumno), y que trasciendan las que aquel, por determinadas causas, decida dictar o escribir en el pizarrón durante la puesta en común. Estas "anotaciones personales" deben ser un lugar propicio para la utilización del lenguaje matemático específico aprendido y para la obtención de información por parte del docente, además de un aporte a la hora de estudiar.

En las carpetas de los alumnos deberán figurar, además, registros de cuestiones que el docente considere de fundamental importancia. Para constituir esos registros podrá:

- entregar a los alumnos fotocopias que los resuman;
- realizar el dictado de los mismos, apelando al pizarrón como elemento auxiliar;
- construir esos registros en forma conjunta con los alumnos.

De las estrategias mencionadas, la última promoverá la reflexión por parte del alumno acerca de lo que ha aprendido y permitirá al docente evaluar cuestiones como:

- el estado de construcción de los conocimientos de los alumnos;
- el estado de construcción del lenguaje matemático.

Sobre la evaluación

La evaluación en esta materia deberá orientarse hacia una práctica que permita a los estudiantes superar la sola memorización de enunciados o la aplicación mecánica de reglas. A su vez, deberá entendérsela como un proceso continuo, que involucra todas las actividades que el docente propone a sus alumnos y que no está asociada únicamente a la calificación obtenida en evaluaciones escritas.

Así como en las clases de Matemática se prioriza la participación y la actitud de hacerse cargo de la resolución de problemas matemáticos, esto deberá formar parte también de la evaluación.

En una prueba escrita, el alumno resuelve problemas, por eso en el momento de la corrección el docente deberá considerar, además de la correcta utilización de las herramientas matemáticas que involucre, la resolución del problema en su totalidad. Es decir que una vez realizada la operatoria necesaria, el alumno debería ser capaz de contextualizar los resultados obtenidos para construir respuestas coherentes a la situación planteada, así como explicar y dar razón de los procedimientos elegidos para el abordaje de la misma. Esto significa que los instrumentos de evaluación que se utilicen, para encuadrarse en el enfoque de esta propuesta curricular, no deberán centrarse solamente en el dominio de mecanismos o en la memorización de algoritmos.

La evaluación es un proceso que brinda elementos a docentes y alumnos para conocer el estado de situación de la tarea que realizan juntos y, como tal, representa una oportunidad de diálogo entre ambos. Así, la devolución de las evaluaciones escritas, deberá realizarse previendo breves momentos de atención personalizada que complementen los comentarios que el docente pueda realizar en los exámenes cuando los corrige. A su vez, los resultados observados en la corrección permitirán al docente reorientar el proceso de enseñanza y planificar la tarea futura.

Es importante que los alumnos conozcan claramente qué es lo que se espera que logren en relación con el contenido que se está evaluando. Por lo general, la calificación final de una prueba solamente es reflejo de la distancia entre lo que se espera que logren y lo efectivamente logrado por ellos, pero tiene idéntica importancia que se analice cuáles son sus progresos en relación con los conocimientos matemáticos evaluados y que se les informe sobre lo que se espera que mejoren en este sentido. Por esta razón resulta importante que el docente lleve registros personalizados de los progresos de todos sus alumnos y que considere la distancia entre las construcciones de los mismos y los saberes matemáticos como un ítem más, entre otros, a la hora de calificar.

Cuando el docente califique a sus alumnos, además de ponderar el estado de situación de cada uno de ellos, deberá tener en cuenta también su propio proceso de enseñanza de la materia y contemplar la distancia entre lo planificado y lo efectivamente realizado, como así también las intervenciones realizadas durante el trabajo de los estudiantes y en qué medida estas han permitido a los jóvenes avanzar en el aprendizaje de cada tema planificado.

Las anotaciones que el profesor de Matemática realice en las pruebas como parte de la corrección de las mismas deberán ser significativas para el alumno. Es decir, convendrá evitar expresiones que solo resulten claras para el docente. En ese sentido, resulta favorecedor el análisis de los enunciados de las pruebas con los alumnos.

Será conveniente realizar ese análisis en la clase que sigue a la de la prueba, para que resulte útil para la autoevaluación del alumno y brinde un complemento de información que no se podría obtener de otro modo. Aprovechará también para comparar varias soluciones equivalentes que los alumnos pudieran haber propuesto para un mismo problema y los invitará a buscar en sus carpetas la información con la que podrían haberse construido las soluciones.

En el desarrollo de los contenidos de cada eje de este Diseño Curricular para la enseñanza de la matemática en la ES, se incluyen algunos ejemplos de actividades con las que se podrían evaluar aprendizajes con el objeto de promover la reflexión acerca del uso de los problemas en el contexto de una prueba escrita.

Expectativas de logro para tercer año

Cuadro de relación entre las expectativas de logro de aprendizaje y de enseñanza

<table>
<tr><th>Se espera que los alumnos:</th><th>Para eso, se espera que el docente:</th></tr>
<tr><td>• Dispongan de distintas estrategias para la resolución de situaciones intra y extramatemáticas.</td><td>• Indague las estrategias que los alumnos despliegan al resolver problemas.
• Proponga problemáticas que puedan resolverse con diferentes estrategias en el marco de los conocimientos disponibles.
• Prevea diferentes formas en las que los alumnos pueden proceder para resolver un problema.
• Organice la puesta en común del trabajo de los alumnos.
• Registre en el pizarrón durante la puesta en común diferentes formas de solucionar los problemas propuestas por los alumnos para su comparación.
• Proponga formas de resolución que considere importantes y que no aparezcan en la puesta en común.</td></tr>
<tr><td>• Busquen distintas modalidades de solución de problemas matemáticos que les permitan el uso de criterios tales como la economía de resolución.</td><td>• Señale las diferencias y similitudes de diferentes formas de resolución.
• Indique ventajas de las soluciones más económicas.
• Proponga el registro de formas económicas de resolución.
• Proponga otras actividades en las que resulte conveniente usar formas económicas de resolución.</td></tr>
<tr><td>• Justifiquen la validez de los razonamientos empleados en una situación problema.</td><td>• Proponga a los alumnos espacios de reflexión individual previos a las reuniones en pequeños grupos.
• Promueva el hábito de fundamentar las propuestas de resolución de un problema.
• Colabore con los alumnos para que utilicen lenguaje matemático en la construcción de justificaciones.
• Construya con los alumnos registros sintéticos usando lenguaje matemático.</td></tr>
<tr><td>• Recorten aspectos matemáticos de situaciones complejas y extramatemáticas.</td><td rowspan="2">• Proponga analizar situaciones extramatemáticas (por ejemplo extraídas de diferentes publicaciones).
• Muestre a los alumnos cómo realizar recortes matemáticos de diferente magnitud de las situaciones propuestas.
• Colabore con los alumnos para lograr modelizar matemáticamente situaciones analizadas.
• Ponga de manifiesto las limitaciones de la modelización construida respecto de la situación estudiada.
• Colabore con los alumnos en la contrastación de los resultados obtenidos en el marco de la situación modelizada matemáticamente.
• Retome las herramientas matemáticas estudiadas en el marco de una situación para su estudio descontextualizado.
• Proponga situaciones en las que puedan reinvertirse los conocimientos construidos.</td></tr>
<tr><td>• Estudien objetos y propiedades matemáticas en los recortes realizados.</td></tr>
</table>

• Asuman actitudes de disposición y apertura para poder reconocer resoluciones mejores que las propias.	• Habilite la participación activa de los alumnos promoviendo la discusión en un marco de respeto por las intervenciones de todos. • Valore la participación de todos los alumnos y permita que los errores se analicen para su corrección sin desmerecer esas construcciones. • Muestre a los alumnos que las producciones de todos son valiosas en diferentes sentidos y por lo tanto merecen respeto y atención. • Proponga el análisis de diferentes soluciones de una misma situación devolviendo a los alumnos la elección de las más convenientes. • Muestre, si fuera necesario, las ventajas de una solución sobre otra mediante la propuesta de situaciones que las pongan de manifiesto. • Construya con los alumnos registros que engloben diferentes propuestas que resulten pertinentes a los contenidos desarrollados.
• Construyan opiniones y conjeturas provisorias acerca de situaciones vinculadas al álgebra.	• Aliente a los alumnos a construir generalizaciones y fórmulas matemáticas. • Acepte conclusiones provisorias y proponga actividades que permitan la evolución de las mismas. • Proponga la búsqueda de ejemplos y contraejemplos de las generalizaciones construidas.
• Reconozcan la provisoriedad de conjeturas formuladas de acuerdo con la información matemática disponible.	
• Generalicen conclusiones utilizando el lenguaje matemático específico.	
• Lean información de gráficas y tablas matemáticas de diferentes tipos para sustentar sus propios análisis críticos.	• Proponga la lectura y análisis de diferentes investigaciones y encuestas extraídas de diferentes soportes. • Aliente el análisis crítico de tablas y gráficos estadísticos. • Proponga el debate acerca de las conclusiones publicadas en diferentes soportes a partir del análisis de tablas y gráficos estadísticos. • Ayude a los alumnos a construir otras conclusiones a partir de tablas y gráficos estadísticos extraídos de diferentes soportes, proponiendo puntos de vista diferentes de los originales.

• Construyan elementos matemáticos gráficos para comunicarse con distintos objetivos y distintos interlocutores.	• Proponga a los alumnos la realización de encuestas para investigar cuestiones significativas. • Ayude a los alumnos a construir protocolos de encuestas adecuados para sus investigaciones. • Ayude a los alumnos a procesar los datos obtenidos. • Ayude a los alumnos a elegir una forma de representación de los datos obtenidos que resulte de mayor pertinencia para determinada exposición. • Ayude a los alumnos a establecer la pertinencia de las conclusiones elaboradas a partir de la información estadística procesada. • Colabore con los alumnos en la organización de presentaciones de las investigaciones realizadas.
• Construyan conjeturas acerca de sucesos aleatorios sobre la base de la información obtenida con distintos instrumentos de recolección y organización de datos. • Usen estrategias para estimar cantidades de distintas magnitudes.	• Proponga a los alumnos situaciones en las que se diferencie azar y probabilidad. • Analice con sus alumnos diferentes situaciones diferenciando las que involucren el azar de las que no. • Ayude a los alumnos a tomar decisiones en el marco de simulaciones y juegos en función de la información probabilística recolectada. • Estimule a los alumnos a estudiar si, en el inicio de determinada situación o juego, todos los participantes se encuentran en condiciones equivalentes. • Estimule a los alumnos a utilizar el registro de datos en el análisis de situaciones aleatorias
• Desarrollen destreza en el manejo de funciones con la calculadora científica.	• Proponga a los alumnos presentar los diferentes tipos de calculadora científica con que cuenten. • Muestre procedimientos generales para el uso de la calculadora. • Proponga situaciones para el uso de la calculadora. • Promueva, si los alumnos lo tienen disponible, el estudio de manuales de uso de la calculadora que manejan. • Promueva el trabajo solidario en el que la calculadora pueda ser utilizada en forma grupal.

Organización de contenidos de tercer año

Criterios de organización

Para el presente Diseño Curricular los contenidos se han organizado en cuatro ejes: Geometría y Magnitudes, Números y Operaciones, Álgebra y Estudio de Funciones, Probabilidades y Estadística. Los mismos responden a campos de conocimiento dentro de la Matemática en los cuales se incluyen núcleos sintéticos de contenidos que agrupan conjuntos de conocimientos que están vinculados entre sí en forma específica.

En cada uno de los ejes se continuará con el trabajo iniciado en los dos primeros años, profundizándolo y orientándolo hacia los niveles de argumentación y formalización que se espera que los alumnos adquieran en su tránsito por el ciclo básico de la Educación Secundaria. Además se incluyen contenidos nuevos que complementan la formación básica de los alumnos.

> El orden de presentación de los ejes y de los núcleos sintéticos dentro de los mismos no implica que el docente deba, necesariamente, enseñarlos en ese orden si consigna justificadas razones en su planificación.

El tratamiento de los contenidos de determinado eje puede provocar la aparición de un nodo en el que se encuentran contenidos de otros ejes. Por ejemplo, para el estudio de funciones, puede necesitarse el concepto de número real, la resolución de ecuaciones y sistemas, el concepto de distancia entre dos puntos, la elaboración de estrategias de cálculo con números de diferentes conjuntos, la construcción de figuras geométricas, entre otros.

La descripción de los contenidos de cada eje contiene orientaciones didácticas. Además, se incluyen ejemplos de problemas y situaciones de enseñanza con los que el docente podrá trabajar algunos de los contenidos del eje y orientaciones acerca de la evaluación de modo que la misma resulte coherente con el enfoque de trabajo que prescribe el presente Diseño Curricular.

Se muestra a continuación un cuadro que resume los núcleos sintéticos de contenidos correspondientes a cada uno de los ejes para tercer año del ciclo básico de la Educación Secundaria:

Esquema de organización de contenidos

Ejes	Núcleos sintéticos
Geometría y Magnitudes	• Figuras planas. • Transformaciones en el plano. • Teorema de Tales. Figuras semejantes. Homotecias. • Trigonometría. • Medida.
Números y Operaciones	• Números racionales. • Números reales.
Álgebra y estudio de funciones	• Trabajo con expresiones algebraicas. • Funciones: fórmulas, tablas y gráficos. • Estudio de funciones. • Resolución de ecuaciones e inecuaciones. • Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
Probabilidades y Estadística	• Estadística. Análisis descriptivo. • Combinatoria. • Probabilidad.

Cuadro de vinculación entre ejes y prácticas involucradas en los núcleos de contenidos

Ejes	Prácticas involucradas
Geometría y Magnitudes	• Analizar, describir y realizar transformaciones geométricas de figuras y cuerpos. • Visualizar y señalar los ejes de rotación de prismas, pirámides, conos, esferas y cuerpos platónicos y clasificarlos según su orden. • Descubrir los ejes de simetría de figuras y cuerpos. • Construir figuras semejantes usando diferentes niveles de precisión en el trazado según ayuden a la interpretación y resolución de situaciones geométricas. • Resolver problemas que involucren figuras planas congruentes y semejantes. • Aplicar homotecias a figuras analizando la variación de medidas de los elementos principales. • Analizar figuras geométricas semejantes con el objeto de construir nociones referidas a la razón de semejanza y a la relación entre áreas. • Hipotetizar acerca de la razón entre los volúmenes de cuerpos semejantes y contrastarlas. • Comprobar con la ayuda del docente la validez del Teorema de Tales. • Calcular diferentes medidas de figuras y cuerpos usando contenidos de otros ejes como herramientas para el cálculo. • Transformar unidades de medida mediante un uso dinámico de la proporcionalidad en el marco de la resolución de problemas de perímetros, áreas y volúmenes. • Analizar formas de representación de transformaciones geométricas en libros y en *software* como *Tess, Cabri* u otros. • Realizar construcciones geométricas utilizando, cuando sea posible, *software* como *Geogebra*, *Geup*, *Cabri CaR* u otros. • Modelizar situaciones geométricas y extrageométricas haciendo uso de los conocimientos disponibles y reflexionando sobre la adaptación de los mismos para producir nuevo conocimiento. • Conocer las razones trigonométricas de triángulos rectángulos. • Usar la calculadora científica para resolver problemas vinculados a lados y ángulos de triángulos rectángulos. • Conocer con la ayuda del docente el teorema del coseno y algunas de sus aplicaciones.

Números y Operaciones	• Verificar la validez de propiedades conocidas en los campos numéricos estudiados en 3º año. • Explicitar propiedades utilizando lenguaje simbólico. • Modelizar situaciones matemáticas y extramatemáticas mediante el uso de números y operaciones. • Analizar, resolver y plantear problemas que involucren la ubicación de números en la recta numérica. • Anticipar resultados de distintos tipos de cálculo en forma autónoma en el marco de la resolución de problemas. • Obtener números racionales comprendidos entre otros dos con el objeto de profundizar la noción de densidad. • Crear números irracionales a partir de reglas de formación para distinguirlos de los racionales, como por ejemplo: 0,101001000100001… • Representar números irracionales en la recta numérica. • Realizar operaciones sencillas con radicales. • Usar calculadoras para realizar cálculos rápidos que permitan anticipar resultados y/o evitar la dispersión de la atención en la actividad que se esté realizando.

Álgebra y estudio de funciones	• Estimar, anticipar y generalizar soluciones de problemas relacionadas con funciones. • Representar, mediante tablas, gráficos o fórmulas, regularidades o relaciones observadas entre valores de diferentes variables. • Interpretar gráficos y fórmulas que modelicen situaciones diversas. • Analizar representaciones de funciones para realizar estimaciones, anticipaciones y generalizaciones. • Modelizar situaciones matemáticas y extramatemáticas mediante ecuaciones para obtener resultados que posibiliten resolver problemas que se planteen en el marco de las mismas. • Representar funciones usando, cuando sea posible, *software* como *Graphmatica*, *Winplot*, *Derive* o *GeoGebra*. • Contrastar los resultados obtenidos en el marco de los modelos matemáticos con las situaciones que representen evaluando la pertinencia de los mismos. • Resolver ecuaciones e inecuaciones. • Resolver sistemas de ecuaciones e inecuaciones.

Probabilidades y Estadística	• Organizar visualmente mediante tablas y gráficas estadísticas datos obtenidos de diferentes fuentes. • Extraer información de tablas y gráficos obtenidos de diferentes fuentes. • Expresar la información global que representan las medidas de tendencia central en un determinado universo. • Establecer la pertinencia de la media, la moda o la mediana de acuerdo al ajuste de cada una a la dispersión de los datos en un determinado universo. • Obtener espacios muestrales utilizando diferentes estrategias. • Calcular la cantidad de elementos de diferentes espacios muestrales utilizando estrategias de cálculo pertinentes a cada caso. • Utilizar con ayuda del docente el cálculo combinatorio como estrategia de modelización de situaciones planteadas. • Hipotetizar acerca de la probabilidad de un suceso y contrastar las hipótesis construidas. • Realizar experimentos aleatorios con el objeto de crear modelos de tratamiento de los mismos desde una perspectiva superadora del determinismo. • Expresar la probabilidad de situaciones matemáticas y extra-matemáticas • Establecer relaciones entre los resultados obtenidos en el cálculo probabilístico como modelo matemático y las situaciones que el mismo modeliza. • Establecer semejanzas y diferencias entre probabilidad y azar.

Desarrollo de contenidos

Eje Geometría y Magnitudes

Enseñar geometría no significa solo enseñar enunciados de propiedades sino también la forma en que se puede llegar a ellos como conclusiones de una tarea planificada.

En 3º año se profundizará la propuesta de trabajo geométrico centrada en el análisis de propiedades de figuras y cuerpos y en la deducción de las mismas. El docente deberá proponer a los alumnos secuencias de actividades en las que ellos tengan la oportunidad de descubrir esas propiedades geométricas y evidenciar su validez.

En 2º año los alumnos comenzaron a trabajar en este sentido y tomaron contacto con el lenguaje simbólico propio de la matemática. El camino que se comenzó a transitar en 2º año se continuará consolidando en 3º año y en los años siguientes de la ES.

Se deberá tener en cuenta que no todos los alumnos podrán comenzar el tránsito hacia la demostración en geometría en los mismos tiempos y que este tránsito seguramente continuará con posterioridad a la escuela secundaria. El trabajo prescripto para este año promueve que aquellos alumnos que se encuentren en condiciones inicien este camino sin sobreexigir a los que aun encuentran dificultades con este tipo de emprendimientos.

La adquisición del lenguaje simbólico propio de la matemática tampoco es inmediata. El docente deberá tener esto en cuenta e indagar cuál es la situación inicial de sus alumnos para establecer desde dónde retomar el trabajo y hasta dónde sus alumnos se encuentran en condiciones de expresarse en este lenguaje. No se aconseja forzar el trabajo en ese sentido, dado que esto podría resultar contraproducente para alcanzar el objetivo buscado. Resultará mejor ir propiciando (a través de las actividades propuestas) el logro de niveles de argumentación cada vez más claros y formales desde el punto de vista matemático.

El docente habrá de tener en cuenta, en su planificación, el conjunto de propiedades conocidas por el grupo de alumnos con los que desarrollará su actividad, y establecerá cuáles serán las que se tomarán como punto de partida para las justificaciones de las nuevas.

A partir de la exploración de figuras o cuerpos geométricos, los alumnos formularán conjeturas en relación con las propiedades de los mismos. Una vez formuladas las conjeturas, deberán elaborar argumentaciones que las validen.

Será conveniente que la planificación de las clases incluya un primer momento de trabajo individual, seguido por un trabajo en pequeños grupos a los que cada alumno concurra con sus propios bosquejos de conjeturación y validación, sean cuales fueren y en el estado en que se encuentren al momento de agruparse.

Una vez que cada grupo haya elaborado sus conjeturas y tenga su propuesta de validación, el docente organizará la puesta en común de lo trabajado. La diversidad de ideas de los diferentes grupos hará más rico el intercambio entre ellos. Si no surgieran en la discusión, el docente pondrá en consideración aquellas cuestiones que considere importantes para aclarar dudas o proponer caminos alternativos.

A partir de la puesta en común, el docente realizará un cierre teniendo en cuenta lo aportado por los alumnos y expresará esas ideas en un lenguaje más específico, con una simbolización adecuada al nivel del grupo, organizando también el registro en las carpetas de la tarea realizada en común.

En años anteriores los alumnos trabajaron el concepto de proporcionalidad. En 3º año se propone el estudio de la proporcionalidad de segmentos, la semejanza de figuras y las razones trigonométricas en triángulos rectángulos. Todos estos temas están asociados a la idea de proporcionalidad directa, por lo que, el docente deberá indagar la situación de sus alumnos respecto de este contenido y disponer actividades pertinentes de acuerdo con el diagnóstico realizado.

Núcleos sintéticos de contenidos

- Figuras planas.
- Transformaciones en el plano.
- Teorema de Tales. Figuras semejantes. Homotecias.
- Trigonometría.
- Medida.

Desarrollo de contenidos y consideraciones didácticas

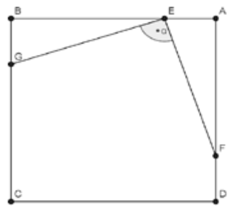
Figuras planas

- Se retomará el estudio de figuras planas y se promoverá la deducción de algunas propiedades nuevas ampliando la mirada sobre el campo conceptual. Se deberá tener en cuenta lo expresado en las consideraciones generales sobre la conjeturación, la validación y la formalización en la comunicación. Para realizar este trabajo se podrán proponer, entre otras, actividades como las de los ejemplos siguientes:

Ejemplo 2:

En la siguiente figura se tiene como datos que ABCD es un cuadrado, que los segmentos BE y AF , BG y EA son congruentes.

Con estos datos y los conceptos ya trabajados encuentre argumentos que permitan asegurar que el ángulo indicado es recto.



La solución no es compleja pero involucra conocimientos construidos en 2º año y que la situación obliga a retomar: propiedades del cuadrado, clasificación de triángulos y suma de los ángulos interiores de un triángulo, además del análisis de la congruencia de triángulos.

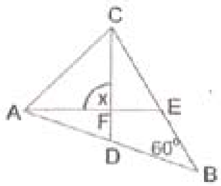
En este problema se pone en evidencia la importancia del uso de una figura para mostrar y analizar gráficamente la situación: mientras que sería bastante engorroso describirla mediante lenguaje coloquial, la figura permite su apreciación rápida.

Es importante aclarar a los alumnos que la medida directa de los ángulos en la figura de análisis verifica la propiedad enunciada solamente para un caso particular, el de la figura dibujada, mientras que el enunciado de la actividad apunta al logro de resultados de mayor grado de generalidad, por lo que resulta absolutamente necesario trascender la figura particular que ha permitido visualizar la situación.

De todas formas, si la figura está bien construida, la medición en ella, además de brindar cierta tranquilidad previa acerca de que el trabajo propuesto no es en vano, proporciona cierta información que bien aprovechada, podría permitir encontrar posteriormente la justificación pedida.

Podría pensarse que, para lograr mayores niveles de generalización, el enunciado debería modificarse preguntando por la amplitud del ángulo en cuestión sin informar a priori que es recto. Sin embargo, la experiencia indica que este tipo de preguntas, lejos de movilizar la necesidad de generalización, promueven la medida como estrategia de respuesta y justificación, y esto podría deberse a que los alumnos se encuentran en el proceso de comprensión de la matemática como ciencia, por lo que la necesidad de generalizar y probar aun no representa una cuestión relevante a la hora de resolver un problema.

Ejemplo 3:



En el triángulo ABC:

CD es perpendicular a AB.

AE es perpendicular a CB.

AE es bisectriz del ángulo $C\hat{A}B$.

Hallar el valor del ángulo X.

Mostrar que el triángulo AFC es isósceles.

En este caso se presenta intencionalmente una figura de análisis que no está *bien construida* (en el sentido de que no respeta las medidas expresadas en el enunciado).

Sin embargo, la figura provee información importante para resolver el problema: muestra las posiciones relativas de los elementos que se mencionan y esto resulta suficiente para resolver el problema.

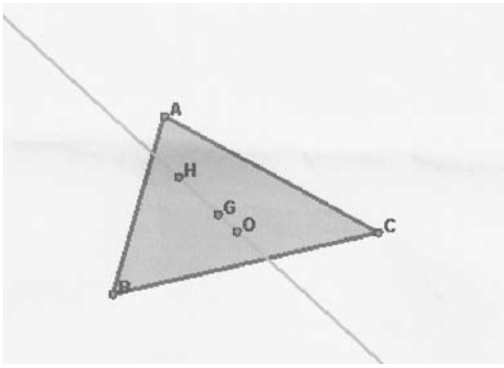
Es posible que los alumnos reclamen que esta figura no está construida correctamente, lo que constituirá un buen signo, ya que si midieran directamente sobre la misma sin advertir que esta es solamente un apoyo para el análisis, habría que retomar el trabajo desde un punto anterior a lo esperable.

Es posible que los jóvenes propongan reelaborar la construcción de la figura para *ver mejor*, en cualquier caso, resultará importante que el docente invite a realizar un esfuerzo para *ver* en la figura original aunque se haya autorizado a construir otra. Este tipo de desafíos resultará interesante tanto para los alumnos como para el docente, a quien le permiten diagnosticar actitudes y procedimientos que aquellos son capaces de usar.

Ejemplo 4:

El punto de intersección de las medianas, el de las mediatrices y el de las alturas de algunos triángulos se encuentran alineados. La recta que determinan se llama línea de Euler.

¿En qué tipo de triángulos es posible determinar esta línea?



La indagación sugerida en forma implícita puede realizarse utilizando, de ser posible, algún *software* de geometría que permita construir medianas, alturas y mediatrices.[1] De esta forma se ganaría el tiempo que insumen las construcciones para la elaboración de las conclusiones pedidas.

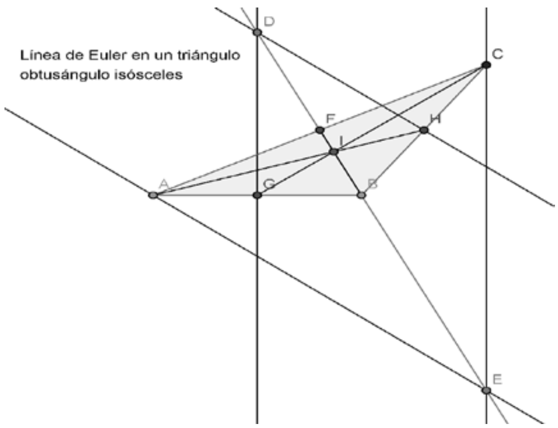
Antes de comenzar la investigación escolar en cuestión, sería conveniente retomar la clasificación de triángulos, de manera de determinar la cantidad total de *casos* que es necesario estudiar.

Realizada esta tarea previa, los alumnos podrán trabajar en la sala de computación divididos en pequeños grupos, en los que se decidirá acerca de los triángulos particulares con los que se trabajará, explicando las razones para su elección.

Finalizada la tarea descripta se regresará al aula, si fuera posible, con las figuras impresas y se podrá organizar nuevos grupos de acuerdo con los tipos de triángulos estudiados para discutir sobre las conclusiones obtenidas.

Con este tipo de trabajo podría ocurrir que en algunos grupos surjan hipótesis que intenten explicar por qué aparece la línea de Euler. Durante la puesta en común, estas hipótesis deberán ser confrontadas para establecer conclusiones generales para el grupo total de clase.

Una de las conjeturas que podrán surgir de este trabajo involucra las medidas de las distancias entre los puntos determinados para trazar la recta. Esta conjetura podrá comprobarse en los ejemplos construidos, lo que permitirá volver sobre la diferencia que existe entre una comprobación y una demostración, si bien no se pretende que esta última se realice.

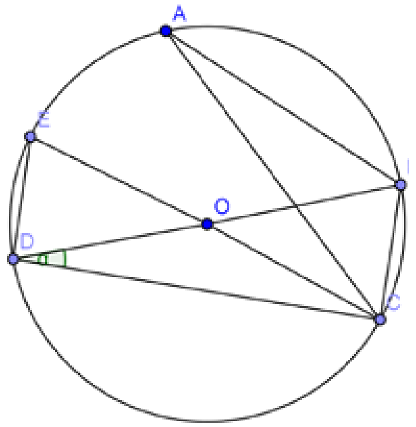


[1] *Geogebra* es un interesante programa gratuito que permite realizar los trazados mencionados con bastante facilidad, además de brindar un cúmulo importante de información adicional. Al finalizar el ejemplo puede verse una figura construida por un alumno con este programa.

Ejemplo 5:

A, B, C, D y E son puntos de la circunferencia de centro O.

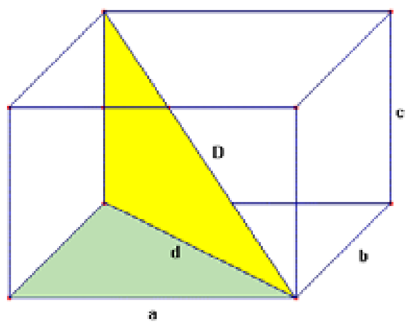
Si el ángulo BDC mide 34º, determinar la medida de cada uno de los siguientes ángulos: COB, DEC, CAB y DCB. Justificar con la propiedad de los ángulos inscriptos en un arco de circunferencia y las propiedades de los ángulos de los triángulos.



En este caso se realiza una importante determinación de los conocimientos a utilizar en la solución del problema, lo que obligará a los alumnos a revisar el estado en el que se encuentran los mismos en su red de significación, reorganizarlos y retrabajarlos con el objeto de volverlos más dinámicos y utilizables.

Será importante orientar sobre el análisis de figuras, proponiendo, por ejemplo, la búsqueda de ángulos inscriptos, centrales, pares de ángulos inscriptos con el mismo ángulo central correspondiente, para lograr una mejor comprensión de la figura, de modo que los alumnos puedan luego utilizar las propiedades de los ángulos y triángulos para dar respuesta al problema planteado.

- Se trabajará también en la formulación de conjeturas sobre propiedades de los polígonos (regulares y no regulares) en relación con los ángulos interiores y diagonales, entre otras, y en la producción de argumentos que permitan validarlas.
- Se profundizará el uso de la relación pitagórica para triángulos rectángulos, así como su aplicación para el cálculo de la distancia entre puntos del plano a partir de sus coordenadas cartesianas.
- También, si las condiciones del curso son adecuadas, se podrá trabajar con las coordenadas cartesianas de puntos en el espacio y con el cálculo de la distancia entre dos puntos del mismo, para lo que resultará interesante extender el Teorema de Pitágoras al espacio:



$$D^2 = c^2 + d^2$$
$$d^2 = a^2 + b^2$$
$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Transformaciones en el plano

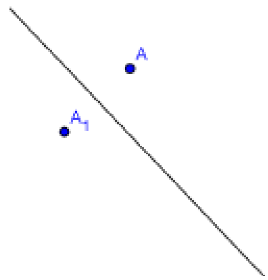
- Se analizarán las propiedades de conservación de longitudes de segmentos, alineación de puntos y amplitudes de ángulos en los llamados movimientos rígidos del plano.
- Se estudiarán los movimientos que mantienen las formas y el tamaño llamados isometrías. Se observará que al superponer figuras que se corresponden en una isometría coinciden es decir, son congruentes.
- Se estudiarán las rotaciones, las reflexiones (simetrías axiales), las simetrías centrales y las traslaciones, estableciendo que son isometrías
- Se trazarán figuras geométricas que se correspondan por alguna transformación en papel liso y usando los útiles de geometría correspondientes.

Ejemplo 6: Reflexión o simetría axial.

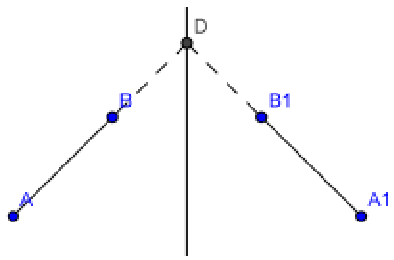
La reflexión o simetría con respecto a un eje (axial ya que axis es eje en latín) es una función que a todo punto A del plano le hace corresponder otro A_1, de modo tal que el eje de simetría es mediatriz del segmento AA_1.

A partir de esta información los alumnos podrán construir figuras de análisis y deducir, por ejemplo:

- que las distancias del punto A y de su transformado al eje es la misma;
- que A y A_1 pertenecen a una recta perpendicular al eje.



- *que dado un segmento AB en su correspondiente A_1B_1 la longitud se conserva, es decir, el largo de AB y el de su transformado A_1B_1 es el mismo.*
- *que si el ángulo cuyos lados contienen a los segmentos que se corresponden en una simetría axial es agudo, el eje de simetría incluye a la bisectriz de ese ángulo*



Las afirmaciones expresadas cobran trascendencia ya que en ellas subyace la idea de que la bisectriz de un ángulo agudo es una semirrecta cuyos puntos equidistan de los lados del ángulo, y esto se relaciona con el estudio de lugares geométricos realizados en los años anteriores de la Educación Secundaria.

Como ya se habrá estudiado con anterioridad "la bisectriz de un ángulo agudo es el lugar geométrico de los puntos del ángulo que equidistan de los lados del mismo". El estudio de la simetría axial brinda una oportunidad de retomar este conocimiento.

- Se estudiarán la simetría central, la traslación y las rotaciones o giros.
- Dadas dos figuras congruentes, se propondrá investigar la existencia de un movimiento o una composición que transforme una en otra.
- Se promoverá el reconocimiento de ejes de simetría en triángulos, cuadriláteros y polígonos. Se reconocerán ejes y planos de simetría en cuerpos.
- Se estudiarán los ejes de rotación de las figuras regulares y su orden.

Ejemplo 7:

En un cuadrado el punto de intersección de las diagonales además de centro de rotación de orden 4 (ya que cuatro rotaciones de 90º, 180º, 270º ó 360º alrededor de este punto transforman al cuadrado en si mismo) es centro de simetría del mismo (ya que cada punto "P" del cuadrado se corresponde con otro "P_1" que se encuentra a la misma distancia del centro y sobre la semirrecta opuesta a la que contiene al punto "P").

Se distinguirá entre centros de rotación y centros de simetría, estudiando la existencia de cada uno en diferentes polígonos regulares.

Ejemplo 8:

Establecer la validez de las siguientes afirmaciones:

- *El triángulo equilátero tiene centro de simetría.*
- *El pentágono regular tiene centro de rotación pero no de simetría.*
- *En el hexágono regular el centro de simetría coincide con el de rotación.*
- *En el hexágono regular el centro de rotación es de orden 6.*
- *El pentágono tiene centro de simetría.*
- *Si un polígono regular tiene una cantidad de lados par, el centro de rotación y el de simetría coinciden.*
- *Los polígonos regulares con número impar de lados tienen centro de simetría.*

Ejemplo 9:

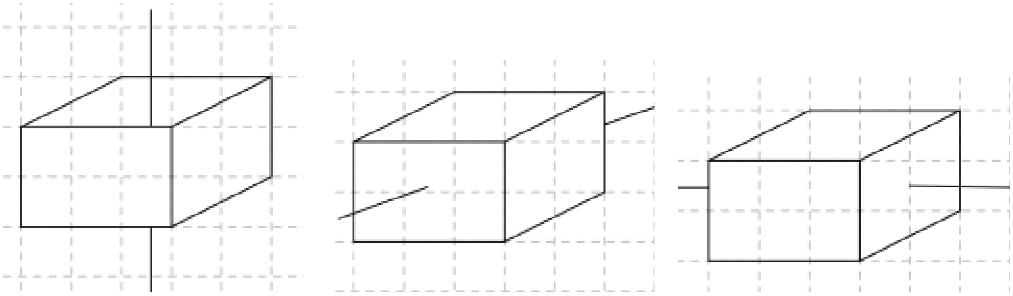
Completar la siguiente figura para que la intersección de las diagonales del rectángulo sea un centro de rotación de orden 2.

Se estudiará el concepto de eje de rotación de un cuerpo.

Ejemplo 10:

En las siguientes figuras se observan los ejes de rotación de un prisma recto rectángulo.

Estos son ejes de rotación de orden dos ya que son dos giros (de 180º y 360º) los que los mantienen invariantes globalmente.



Se propondrá investigar la relación existente entre el orden de rotación de los ejes de los cuerpos platónicos que pasan por los centros de las caras y el orden de rotación de esos centros de esas caras.

Ejemplo 11:

Centros de rotación

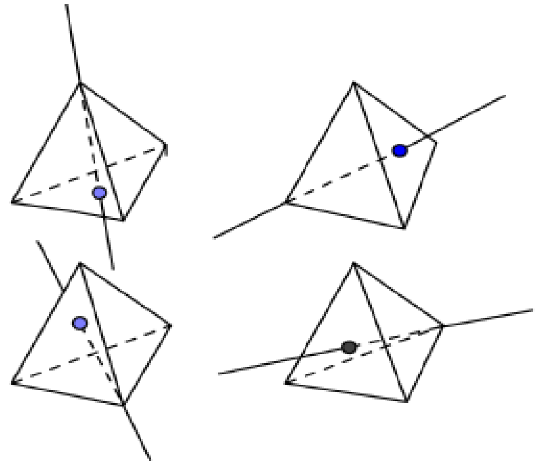
	Orden 3	Orden 4	Orden 5
Triángulo equilátero	X		
Cuadrado		X	
Pentágono			X

El tetraedro tiene 4 caras que son triángulos equiláteros y tiene 4 ejes (que pasan por el centro de cada una de las caras) cuyo orden coincide con el orden de rotación de esas caras.

Ejes de rotación

	Ejes de Orden 2	Ejes de Orden 3	Ejes de orden 4
tetraedro	3	4	---
cubo	6	4	3
octaedro	6	4	3

Ejes de orden 3 del tetaedro:



- Se investigará la existencia de ejes de simetría en diferentes figura planas.

Ejemplo 12:

1) Determinar los ejes de simetría de todas las clases de triángulos y cuadriláteros
2) Analizar en los polígonos regulares la relación entre la cantidad de lados, la cantidad de diagonales y la cantidad de ejes de simetría.

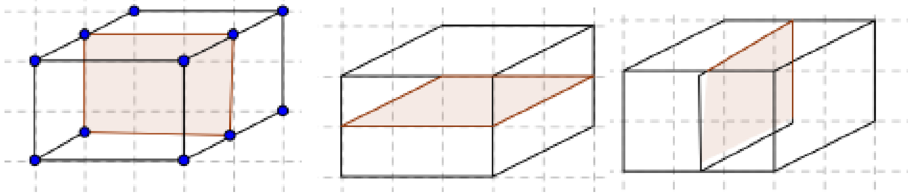
Ejemplo 13:

Completar la figura para que tenga dos ejes de simetría.

- Se estudiará la simetría de los cuerpos con respecto a planos.

Ejemplo 14:

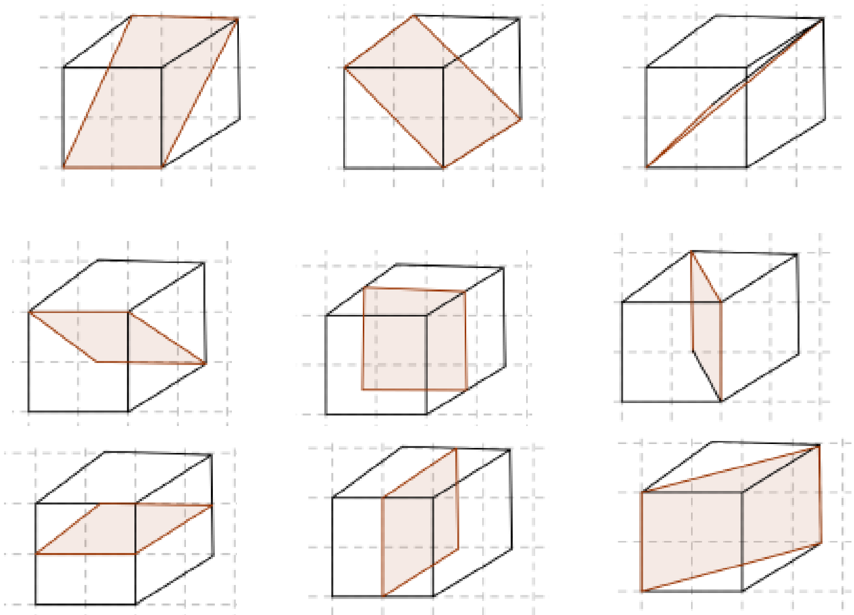
Los prismas rectos rectangulares tienen tres planos que los dejan invariantes globalmente por simetría.



El estudio de las transformaciones permitirá abordar los planos y ejes de simetría de cuerpos platónicos trabajados anteriormente sobre los que podrá volverse con una mirada enriquecida por los aprendizajes construidos.

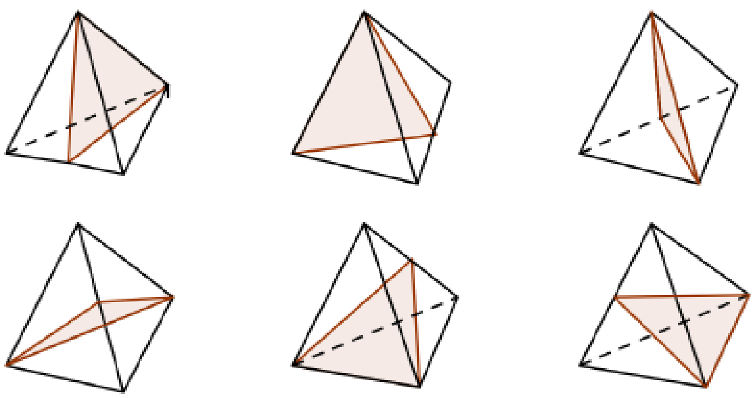
Ejemplo 15:

Analizar si los siguientes nueve planos son planos de simetría del cubo.



Ejemplo 16:

Analizar si los siguientes son planos de simetría del tetraedro.



- Se retomará el trabajo con las coordenadas cartesianas proponiendo la transformación de puntos y de figuras del plano. Se podrán obtener conclusiones sobre lo que ocurre con las coordenadas de los puntos en cada movimiento.
- Si el nivel del curso es adecuado y los tiempos lo permiten, se podrán trabajar los movimientos desde un punto de vista matricial (Ver Anexo I).

Teorema de Tales. Figuras semejantes. Homotecia

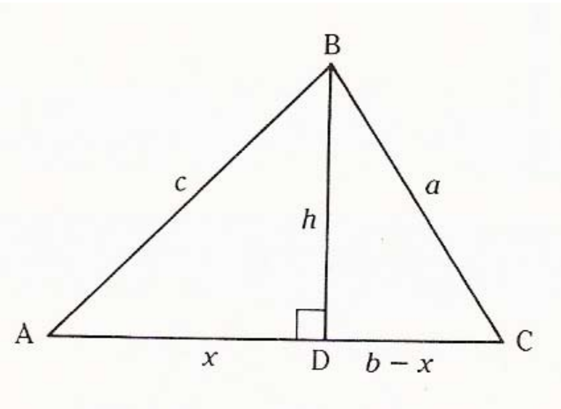
- Se propondrán problemas acerca de la división de segmentos en *partes iguales* (congruentes) y proporcionales.
- Se estudiarán figuras semejantes y se establecerán criterios de semejanza de triángulos. Se aplicarán los criterios construidos al estudio de la semejanza de triángulos rectángulos.
- Se estudiará la homotecia y se realizará la construcción de figuras en escala.
- Si el nivel del curso es adecuado y los tiempos lo permiten se podrá trabajar la homotecia desde un punto de vista matricial (Ver Anexo II).
- Se establecerán relaciones entre perímetros y áreas de triángulos semejantes y las que existen entre perímetros y áreas de polígonos semejantes.
- Del mismo modo, se estudiará la existencia de relaciones entre áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.

Trigonometría

- Se definirán las razones trigonométricas, seno, coseno y tangente para un ángulo agudo de un triángulo rectángulo y se generalizarán teniendo en cuenta lo estudiado sobre la proporcionalidad de lados en triángulos rectángulos semejantes.
- Se usarán calculadoras científicas para el cálculo de lados y ángulos en triángulos rectángulos aplicando trigonometría.
- Se propondrá el cálculo del área del triángulo acutángulo aplicando trigonometría.

Ejemplo 17: El Teorema del Coseno

Los alumnos podrán, con la ayuda del docente y recordando el teorema de Pitágoras, estudiar la demostración de la regla del coseno para triángulos acutángulos, como se muestra a continuación:



En el triángulo CDB el ángulo CDB es recto por ser h la altura.

Por Teorema de Pitágoras:

$a^2 = h^2 + (b - x)^2$

$a^2 = h^2 + b^2 - 2 b x + x^2$ (1)

En el triángulo ADB el ángulo ADB es recto por ser h la altura.

Por Teorema de Pitágoras:

$c^2 = h^2 + x^2$ (2)

De   (1) y (2)

$a^2 - c^2 = b^2 - 2 b x$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 b x$

En este momento el docente habrá previsto que los alumnos preguntarán los motivos de realizar la sustracción entre (1) y (2).

Lo cierto es que ese procedimiento implica el uso del artificio de la suma miembro a miembro y responde a la intencionalidad de construir una expresión que se asemeje al teorema de Pitágoras para un triángulo acutángulo.

El docente deberá explicar cuidadosamente esta cuestión, para ello en la introducción del trabajo de demostración propuesto deberá ponerse de manifiesto qué es lo que se quiere demostrar, para qué y a qué contenido conocido se intentará asimilar el resultado para obtener conclusiones con mayor grado de generalidad.

En ADB:

$\cos A = x / c$ es decir $x = c \cos A$. Esto nos permitirá obtener:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 b c \cos A$

A continuación se propondrá a los alumnos reproducir este razonamiento para obtener:

1) b^2

2) c^2

Es conveniente plantear que no se ha probado para el caso de A obtuso. Esto podrá analizarse posteriormente.

Medida

- Se estudiarán unidades de medida macro y microscópicas.
- Se favorecerá el conocimiento de equivalencias entre expresiones de una cantidad en diferentes unidades para magnitudes como capacidad, masa y volumen, abordando por ejemplo la relación existente entre litro, cm^3, dm^3 y otras.
- Se ejercitará la transformación de la expresión de una cantidad de una unidad a otra de mayor o menor orden construyendo estrategias para tal fin en las que se aplique la proporcionalidad.

Orientaciones para la evaluación

A continuación se propone una actividad de evaluación para el contenido Transformaciones en el Plano:

> Ejemplo 18:
>
> Leer atentamente el siguiente relato:
>
> Un alumno afirma que *al aplicar* a una figura cualquiera una simetría con respecto a un eje, y a la figura obtenida se le aplica otra simetría axial respecto de un eje perpendicular al primero, el punto de intersección de ambos ejes es centro de simetría entre la primera y la última figura.
>
> 1. Construir una figura que muestre la situación planteada ¿se verifica lo expresado para el caso de esa figura?
> 2. En un sistema de ejes cartesianos colocar dos figuras que se correspondan en una simetría central respecto del punto (0;0). ¿se pueden encontrar dos ejes perpendiculares para realizar dos reflexiones que hagan coincidir las dos figuras? ¿cuáles son esos ejes?

La situación planteada promueve la aparición de nuevo conocimiento a partir de los construidos respecto de los movimientos rígidos en el plano. Se aborda el tema de la composición de isometrías y de la relación existente entre la composición en determinadas circunstancias y las isometrías entre sí.

Los alumnos están habituados a este tipo de trabajo que se ha realizado al tratar de encontrar movimientos que hacen coincidir dos figuras congruentes. Si bien el problema plantea un ida y vuelta (composición de reflexiones / simetría central) versus (simetría central / composición de reflexiones) el docente puede decidir, a partir del trabajo realizado con el grupo, eliminar alguna parte de la actividad.

Sea cual fuere la decisión que se tome, resultaría importante retomar este problema en la clase en la que se revise con todo el grupo el enunciado de la evaluación.

La primera parte de la actividad brinda la posibilidad de proponer la indagación para la obtención de isometrías a partir de la composición de dos reflexiones:

- ¿Qué otras isometrías pueden obtenerse como composición de dos reflexiones cambiando la posición relativa de los ejes?
- ¿Pueden obtenerse resultados equivalentes con tres reflexiones? ¿Por qué?

La segunda parte pretende ir un poco más allá, constituyendo quizá una oportunidad para generalizar la afirmación del alumno del que habla el problema.

Una variante interesante (si el nivel de la clase lo permite) puede ser dividir la misma según dos temas diferentes para realizar la prueba. Cada uno de los cuales deberá recibir, además de la descripción inicial de la situación, una de las partes del problema a resolver, de esta manera, en la clase en la que se discutan los enunciados, pueden abordarse las dos cuestiones de manera simultánea, con lo que esa prueba, más allá de ser un instrumento con el que se evalúa el estado de construcción de los conocimientos de los alumnos y el grado de alcance de los logros que se plantee el docente, se constituye en el punto de partida para continuar aprendiendo.

De acuerdo a lo planteado en el enunciado, se deberá considerar que el alumno ha respondido satisfactoriamente a la prueba si:

- construye la figura pedida haciendo uso adecuado de los elementos de geometría y el tipo de papel necesarios;
- construye una figura adecuada para verificar lo que expresa el enunciado cuidando lo mejor que pueda los detalles que sabe que son necesarios para que las figuras sean congruentes;
- logra verificar, mediante el trazado de líneas auxiliares, si la primera y la última figura se corresponden en la simetría o composición involucrada y puede explicar por qué;
- construye una respuesta pertinente al problema planteado.

Para estos logros el docente durante las clases debe:

- proponer variadas situaciones en las que resulte necesario construir pluralidad de figuras en diferentes tipos de papel;
- mostrar las ventajas de cada tipo de papel para determinados trabajos;
- proponer secuencias de actividades para que los alumnos aprehendan las características de los diferentes movimientos rígidos del plano, mediante el trazado de figuras, su análisis, la propuesta de conjeturas y la validación de las mismas;
- mostrar el uso correcto de todos y cada unos de los elementos de geometría;
- construir figuras en el pizarrón en las que se aprecie la diferencia entre líneas principales y auxiliares;
- nombrar adecuadamente figuras en el pizarrón mostrando las convenciones habituales con las que se las realiza;
- mostrar que para que las construcciones sean adecuadas para una mejor visualización hay que tener en cuenta detalles que trascienden lo estético, como la diferenciación entre líneas de trazo y líneas auxiliares;
- relacionar figuras iniciales y finales mediante líneas auxiliares;
- discutir con los alumnos formas de mostrar que dos figuras son congruentes sin necesidad de superponerlas:
- proponer, en la medida de lo posible, construcciones geométricas haciendo uso de *software*;
- brindar ayuda a los alumnos en la construcción de figuras con los elementos con los que cuenta;
- brindar la posibilidad de que los alumnos se asistan solidariamente entre sí en la construcción de figuras geométricas;
- construir junto con los alumnos respuestas adecuadas a los problemas planteados.

Cualquier información adicional correcta que el alumno brinde acerca de la situación, más allá de estas cuestiones, deberá considerarse como superadora de las expectativas de la actividad, y esta situación deberá verse reflejada en la calificación de su trabajo con puntaje adicional.

Eje Números y Operaciones

En este eje se retomará el trabajo de análisis de las operaciones y sus propiedades realizado en primero y segundo años con números naturales, enteros y racionales, profundizándolo y ampliándolo a los números reales. Se continuará trabajando con situaciones en las que intervengan diferentes tipos de cálculo (mental o escrito, exacto o aproximado, con o sin uso de la calculadora), para que los alumnos adquieran habilidad en la realización de cualquiera de ellos y logren usar el más conveniente en el contexto de cada situación.

Ejemplo 19:

Calcular mentalmente usando propiedades de las potencias y raíces

a) $\sqrt[4]{14+\sqrt[3]{5+\sqrt{7+\sqrt{4}}}}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{3^5+3^5+3^5}}{\sqrt{3^6+3^6+3^6+3^6}}$

La aparente complejidad de los cálculos brinda al docente la posibilidad de mostrar la forma en la que pueden resolverse este tipo de cálculos haciendo uso de las propiedades mencionadas.

Cuando se hace referencia al cálculo mental debe tenerse en cuenta que se trata de un tipo de cálculo que se logra mediante la implementación de diferentes estrategias, lo que no significa que no puedan usarse, por ejemplo, registros escritos de algunos cálculos, especialmente cuando los resultados parciales a recordar para obtener la respuesta final supera la capacidad de almacenamiento de la memoria de los alumnos. El no permitir este tipo de registros al principio o en determinados casos puede conspirar con el logro de aprendizajes significativos respectos de este tipo de cálculos.

Como se advierte fácilmente, se han colocado solamente dos ejemplos que muestran el tipo de cálculos sugeridos, el docente tendrá en cuenta la necesidad de contar con un mayor número de los mismos para que sus alumnos adquieran la práctica necesaria.

Se pretende que se continúe incentivando el trabajo con calculadoras científicas y que las mismas se vayan consolidando como herramientas al servicio del razonamiento, tanto en la resolución como en el control y la estimación del resultado de las operaciones.

Se continuará trabajando en la producción y validación de enunciados sobre propiedades de los números y las operaciones. La validación se realizará a través de argumentaciones deductivas que continuarán evolucionando hacia niveles de formalidad cada vez mayores. Se deberán aceptar, todavía, argumentaciones poco precisas o poco formales -desde el punto de vista matemático- de modo que los alumnos continúen acercándose a producir argumentaciones deductivas más formales confiando en sus posibilidades de hacerlo y contando con la ayuda del docente.

El docente deberá proponer a los alumnos actividades de exploración, a partir de las cuales puedan detectar regularidades, formular conjeturas, hacer generalizaciones y validarlas.

Con este tipo de actividades se estarán trabajando contenidos algebraicos articulados con los contenidos de este eje.

Núcleos sintéticos de contenidos

- Números racionales
- Números reales

Desarrollo de contenidos y consideraciones didácticas

Números racionales

- Se retomará el trabajo con los números racionales iniciado en 2º año. Se profundizará la representación de los números racionales en la recta numérica, las diferentes formas de expresar un número racional –fracción, expresión decimal, notación científica- la jerarquía de las operaciones y las propiedades de las mismas. Teniendo en cuenta la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición, se trabajará la extracción de factores comunes de expresiones numéricas y algebraicas.
- Se continuará trabajando con la aproximación de números racionales utilizando redondeo y truncamiento, justificando las decisiones tomadas al respecto. Se extenderá este análisis a los métodos de aproximación utilizados por diferentes calculadoras.
- Se propondrán actividades que afiancen los conocimientos construidos a través de su reinversión en situaciones que enriquezcan su significado.

A continuación se presentan ejemplos en los que se propone a los alumnos replantear el análisis de los números y su operatoria con el objetivo de afianzar y enriquecer conocimientos construidos hasta este momento:

Ejemplo 20:

Los números que se adicionan reciben ambos el nombre de sumandos y los que se multiplican reciben ambos el nombre de factores, es decir en ambas operaciones los números con los que se opera reciben el mismo nombre.

¿Por qué en las otras operaciones no ocurre lo mismo?

El análisis de esta situación, que parece muy obvia, promueve un aprendizaje que otorga significado a conceptos que, aun habiendo sido trabajados anteriormente, todavía pueden hallarse sin conexión: operaciones, conmutatividad, nombres de los números que intervienen en una operación, operaciones inversas.

Ejemplo 21:

Analizar si las siguientes expresiones son equivalentes justificando la respuesta con alguna propiedad de las operaciones:

(1+2+3) x (a+b+c)

(a+b+c) x (2+2+2)

(1+1+4) x (b+a+c)

El ejemplo muestra las propiedades que se busca retomar. Es posible que el docente decida trabajar con otros números que resulten menos obvios pero deberá ser cuidadoso al considerar si los mismos permiten analizar las propiedades de las operaciones que permiten resolver el problema propuesto.

Ejemplo 22:

Siendo a un número racional, determinar qué relación de orden existe entre a y a^2

- si $a > 1$ entonces $a......a^2$
- si $0 < a < 1$ entonces $a......a^2$
- si $-1 < a < 0$ entonces $a......a^2$
- si $a < -1$ entonces $a......a^2$
- si $a = 0$ entonces $a......a^2$
- si $a = 1$ entonces $a......a^2$

Justificar cada respuesta:

La propuesta de este tipo de problemas permite a los alumnos emprender el camino hacia la superación de supuestos en los que subyacen errores deterministas acerca de la calidad de los números con los que operar y los resultados de las operaciones.

Ejemplo 23:

Analizar la validez de la siguiente afirmación:

"Siendo a y b dos números racionales, si $a^2 = b^2$ entonces se puede afirmar que $a = b$"

Este cuestionamiento retoma los conocimientos construidos en el ejemplo anterior.

En este tipo de trabajo el signo de los números adquiere estatus de variable a considerar por el alumno para la resolución de un problema y así se pueden evitar frecuentes errores futuros en temas como valor absoluto o potencias de índice par.

Ejemplo 24:

¿Qué porcentaje de a^2 es el número a?

Hacer el estudio para:

- $a = 2$
- $a = 4$
- $a = 10$
- $a = 25$
- $a = 50$

En este ejemplo se retoma la cuestión de la proporcionalidad numérica poniendo a prueba los conocimientos construidos por los alumnos.

Ejemplo 25:

Calcular mentalmente el menor número natural por el que se debe multiplicar

$(2^3 \times 3^2 \times 5)$

para que el producto resulte un cuadrado perfecto. Justificar la respuesta

Este ejemplo y el que sigue constituyen otra aproximación al cálculo mental. Nuevamente el análisis del significado del cálculo presentado resulta la clave para la solución del problema.

Ejemplo 26:

Si $3^a = 6$ entonces ¿a qué es igual 3^{a+2}?

Ejemplo 27:

A cuánto equivale $(-1)^{2n}$ siendo n un número natural.

¿Cómo varía el resultado

- si n es un entero negativo?
- Si n es cero?

Si n es $\frac{3}{2}$?

Este ejemplo completa el análisis propuesto en los dos ejemplos anteriores. Como puede observarse se trata de propuestas de mayor generalidad que rondan las mismas cuestiones con las que se ha estado trabajando en la secuencia.

Ejemplo 28:

Analizar el valor de verdad de las siguientes expresiones:

* la suma de tres números pares consecutivos es divisible por 6.
* La resta de los cuadrados de dos números impares consecutivos es divisible por 8.
* Si al producto de dos números pares consecutivos se le suma 1 se obtiene el cuadrado de un número impar.

Ejemplo 29:

Sabiendo que

$3^{x} + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} = 363$

Hallar el valor de x

Los dos últimos ejemplos podrán considerarse desafíos para algunos alumnos. Para otros, se trata de un avance en el aprendizaje de las propiedades de las operaciones. Para ambos, las propuestas constituyen situaciones superadoras de los aprendizajes logrados promoviendo avances cualitativos de los mismos.

Como se esbozó en algunos de los ejemplos, los alumnos suelen cometer en forma más o menos sistemática algunos errores característicos. Será importante presentarles situaciones vinculadas con estos errores de manera de que tengan la oportunidad de revisar sus concepciones, ponerlas en cuestión y corregirlas. Algunas de estas cuestiones son:

- El cero como factor.
- El cero en la división, tanto como dividendo o como divisor, y el análisis especial de 0/0.
- El 1 y el -1 como factores o divisores.
- El cero como elemento neutro de la adición.
- El 1 como elemento neutro de la multiplicación.
- El cero como base en la potenciación.
- El cero como exponente en la potenciación.
- Casos en los que la multiplicación funciona como una operación que *agranda* y la división como una operación que *achica*.

Además se profundizará la noción de número racional y el concepto de densidad. Para el estudio de la densidad se trabajará por ejemplo la búsqueda de números comprendidos entre otros dos.

Tal como se anticipó en las consideraciones generales, en este eje se propondrá un trabajo de generalización y uso de fórmulas en forma articulada con el eje de Introducción al álgebra y al estudio de funciones. Por ejemplo:

Ejemplo 30:

Analizar la siguiente secuencia, continuarla y generalizarla:

$1 . 2 = 1 + 1^2$

$2 . 3 = 2 + 2^2$

$3 . 4 = 3 + 3^2$

$4 . 5 = 4 + 4^2$

5 . ... = ...

6 . ... = ...

...... = ...
...... = ...

n . ... = ...

La expresión que generaliza lo observado en la secuencia anterior es:

$$n . (n + 1) = n + n^2$$

Esta última expresión no es más que la aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición.

Ejemplo 31:

Los números que se leen de la misma forma de derecha a izquierda que de izquierda a derecha como 43234 se llaman capicúas.

¿Será verdad que todos los capicúas de cuatro cifras son divisibles por 11?

A continuación se sugiere una prueba:

Todo número capicúa de cuatro cifras es de la forma abba, donde a y b son dos dígitos distintos o iguales.

Como cualquier otro, este número se puede expresar como:

1000a + 100b + 10b + a

Si se aplica la propiedad conmutativa y se asocia adecuadamente se obtiene:

(1000 a + a) + (100b + 10b)

que será equivalente a:

1001 a + 110 b =

(*) 11x91 a + 11 x 10 b =

11 (91 a + 10 b)

luego:

$$\text{abba} = 11 \underbrace{(91\,a + 10\,b)}_{k}$$

abba = 11 k

Como a y b son naturales, k también lo es.

Esto es lo que se quería probar.

Como se hiciera en un ejemplo del eje de Geometría y Magnitudes,[2] es importante poner de manifiesto a los alumnos que en el paso (*) de la prueba se ha procedido intencionalmente buscando el factor "11" ya que es lo que permitirá probar exitosamente la propiedad. Es decir, si analizando los números involucrados en el paso anterior no se hubiera logrado expresarlos como producto de 11 por algún otro natural la prueba hubiese fracasado.

Posteriormente se profundizará el concepto de divisibilidad en Z.

Números reales

La noción de número irracional fue presentada en segundo año con miras al reconocimiento de su existencia y a su diferenciación con los números racionales.

Se integrarán los contenidos de este eje con los del eje Geometría y Magnitudes, ya que los números irracionales aparecieron en la historia de la matemática vinculados a la geometría y las mediciones.

Se propone que el docente elabore una secuencia para el trabajo de sus alumnos en la que estos tengan la oportunidad de calcular las medidas de las diagonales de diferentes cuadrados y rectángulos utilizando el teorema de Pitágoras.

[2] Véase la demostración del teorema del Coseno del eje Geometría y Magnitudes.

El docente propondrá a los alumnos que, utilizando regla y compás, busquen estrategias para ubicar los números obtenidos en la recta numérica.

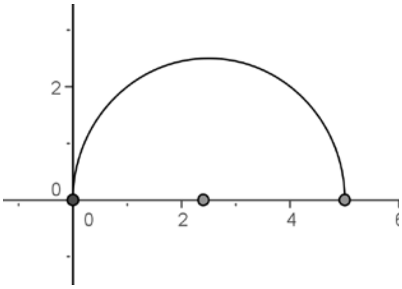
Ejemplo 32:

Representación de raíz cuadrada de 5:

El siguiente constituye un método alternativo al tradicional para la representación de raíces de índice par en la recta numérica.

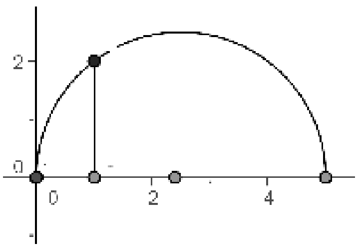
Se ha elegido representar la $\sqrt{5}$ solo a los efectos de mostrar el método.

Si el docente, en el transcurso de su análisis de la validez del método encontrara alternativas que economizaran la mecánica podrá ponerlas en funcionamiento.



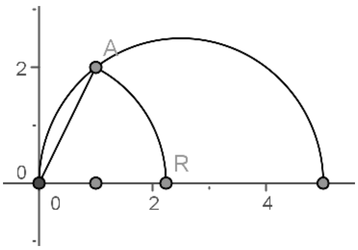
Se traza una semicircunferencia de diámetro 5 como muestra la figura, obsérvese que el centro de la circunferencia está en $x = \frac{5}{2}$

Se traza un segmento perpendicular al eje de abscisas desde el punto (1; 0) hasta la semicircunferencia. Llamaremos A al extremo del segmento que pertenece a la semicircunferencia.



La longitud del segmento OA (se ha llamado O al origen de coordenadas como suele hacerse habitualmente) representa la raíz cuadrada de 5, que puede trasladarse mediante un arco de circunferencia por ejemplo sobre el eje x.

El punto R representa raíz de 5



Al cierre de esta secuencia de actividades, el docente abordará las nociones de segmentos conmensurables e inconmensurables, de completitud de la recta cuando en ella se incorporan los números irracionales, y nombrará al *conjunto numérico* como el de los números reales (R). Estas nociones continuarán profundizándose en los últimos años de la ES.

Se presentará la notación de intervalos reales y se extenderá la noción de módulo de un número.

Orientaciones para la evaluación

Para la evaluación en el eje Números y Operaciones, puede ser necesario recurrir a situaciones que involucren contenidos de otros ejes.

En este apartado se presenta un ejemplo de actividad que permite evaluar cuestiones inherentes a este eje y que sería difícil evaluar de manera integrada con otros contenidos:

Ejemplo 33:

Considerar la siguiente colección de fracciones:

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \frac{1}{14}, \frac{1}{16}$

1. ¿Se trata de un conjunto denso de números? Justificar.
2. ¿Existe un conjunto numérico que sea denso, que contenga estas fracciones y que no sea necesariamente Q?[3]

Los alumnos se encuentran familiarizados con los conceptos involucrados en esta actividad ya que deberán haberlos trabajado durante el desarrollo de los contenidos del eje.

Es importante mencionar que se trata de un contenido muy específico y el docente deberá diagnosticar si los alumnos se encuentran en condiciones de encarar actividades como esta. Las razones para incluirlas tienen que ver con la necesidad de abordar cuestiones que tradicionalmente se postergan para priorizar otras.

Las cuestiones que se plantean como necesarias para evaluar con este tipo de actividad, son transferibles a la evaluación de los aprendizajes de otros contenidos.

Para que los alumnos sean capaces de resolver este tipo de actividades, en las clases de matemática el docente deberá:

- pedir a los alumnos que muestren que N no es cerrado para determinadas operaciones;
- pedir a los alumnos que muestren que Z no es cerrado para determinadas operaciones;
- proponer a los alumnos actividades en las que deban escribirse conjuntos numéricos de diferentes formas: coloquial, intervalos, entornos u otras;
- proponer a los alumnos actividades en las que se necesite representar conjuntos numéricos en la recta numérica;
- proponer actividades en las que deban expresarse números racionales de diferente manera;
- Explicar a los alumnos que las fracciones son números que se obtienen al dividir dos números enteros;
- enseñar que hay muchas fracciones que son equivalentes y la utilidad de esta situación para operar con las mismas;
- proponer actividades que permitan a los alumnos reconocer la densidad del conjunto Q;
- proponer discusiones que promuevan el aprendizaje de la diferencia entre "infinito", "todo", "limitado o acotado", "denso" y otras "expresiones clave";
- colaborar con los alumnos en la construcción de razonamientos que les permitan comprender básicamente las nociones referidas a propiedades de los conjuntos numéricos;
- seleccionar cuidadosamente los registros que hará figurar en las carpetas de los alumnos acerca de las propiedades de los conjuntos numéricos;
- proponer actividades previas similares o con relación a la situación planteada.

Deberá considerarse que el alumno ha respondido satisfactoriamente a la situación propuesta si logra explicar que, a pesar de que en algunos casos se cumple que entre dos fracciones hay una tercera,

[3] En la redacción del ejemplo se ha utilizado la palabra "conjunto" de manera coloquial, es decir no debe interpretarse que para presentar este tipo de situaciones es necesario realizar un estudio previo de la Teoría de Conjuntos.

esto no se da en todos los casos y que, por lo tanto, el conjunto no es denso como lo es, por ejemplo, un intervalo como el [0, 1], que funciona como respuesta para la segunda pregunta.

Como se aprecia la respuesta involucra el dominio de numerosos conceptos que expresan varias palabras clave como:

- fracciones;
- densidad;
- intervalo;
- infinito;
- algunos símbolos específicos.

Es posible que no todos los alumnos utilicen un lenguaje tan sintético y formal para dar respuestas aceptables. En todo momento deberá tenerse presente que la formalidad del lenguaje es una meta a muy largo plazo para alcanzar y que los jóvenes se encuentran dando los primeros pasos en esta práctica.

Ejemplo 34:

Frente al problema planteado anteriormente un alumno responde:

- "Las fracciones de la lista no son densas porque no hay ninguna que esté entre 1/4 y 1/2 como la 3/8".
- "El [1/16,1/2] es el denso de la pregunta 2".

Evidentemente este alumno necesita mejorar algunas expresiones, y el docente deberá investigar si su respuesta a la primera pregunta constituye solamente un contraejemplo o si olvida que la consideración sucesiva de fracciones intermedias supone la idea de infinito aplicable también a la interpretación del intervalo propuesto como respuesta a la pregunta 2. Sin embargo su respuesta puede considerarse correcta ya que demuestra conocer el tema del que se le está hablando y ha estudiado los procedimientos registrados en su carpeta. Los ajustes necesarios deberán abordarse en oportunidad de la devolución de las evaluaciones o en la clase de análisis de la prueba (que será en lo posible la siguiente a la de la prueba).

Junto con esta respuesta pueden aparecer otras *mejor redactadas*. Provisoriamente todas pueden ser calificadas del mismo modo. En la clase en la que se realice el análisis de la prueba con el grupo total se pondrá de manifiesto que, si bien en esta primera etapa todas las diferentes formas pueden considerarse correctas, hay algunas mejores que otras y cada alumno deberá aspirar a mejorar la expresión, ya que esta cuestión será central más adelante.

Para abordar este tema, pueden presentarse diferentes expresiones de la misma respuesta para analizar sus similitudes y diferencias e intentar establecer la *matemáticamente más clara* junto con el docente. De esta manera los alumnos tendrán la posibilidad de tomar conciencia de la forma en la que pueden lograr expresiones cada vez más adecuadas en esta materia.

Eje Álgebra y estudio de funciones

Tal como se dijo con anterioridad, en 3º año los alumnos deberán consolidar los aprendizajes iniciados en los dos primeros años de la ES. Esta consolidación supone un cambio cualitativo en la forma de razonamiento que no es inmediato y que requiere de tiempos personales diferentes.

El aprendizaje del álgebra es un aprendizaje complejo por las dificultades que representa el comprender el uso de expresiones literales como expresión general de una propiedad visualizada. Esto deberá ser tenido en cuenta por el docente para el trabajo de los contenidos de este eje.

Como operación inversa de la distributividad se extraerán factores comunes en expresiones algebraicas con el objeto de introducir a los alumnos al trabajo de transformación de expresiones algebraicas aditivas en expresiones multiplicativas. Explicitando las razones de la necesidad se justificará el uso de paréntesis.

Como ya se mencionó en el Diseño Curricular de 2º año, la puerta de entrada al álgebra elegida para el presente Diseño Curricular es la generalización. Dentro de la matemática hay dos contextos en los que el proceso de generalización resulta de indiscutible utilidad para el establecimiento de propiedades importantes: el contexto numérico y el geométrico. Por esta razón, el desarrollo de los contenidos de este eje aparecerá integrado con el desarrollo de los contenidos de los dos ejes nombrados anteriormente.

En los dos primeros años de la ES, los alumnos ya han comenzado a trabajar con el concepto de variable y han puesto en práctica procedimientos de generalización y simbolización. Estos conceptos y procedimientos serán retomados y profundizados a lo largo de este año.

Se propondrá continuar profundizando el concepto de función y su expresión en lenguaje simbólico, así como el análisis de la relación entre la función como modelo matemático y las situaciones que modeliza, mostrando los alcances y restricciones del modelo en relación con las situaciones. Se incorporará el estudio de algunos aspectos de las funciones que son de utilidad para establecer conclusiones respecto de las situaciones modeladas.

Núcleos sintéticos de contenidos

- Trabajo con expresiones algebraicas.
- Funciones: fórmulas, tablas y gráficos.
- Estudio de funciones.
- Resolución de ecuaciones e inecuaciones.
- Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

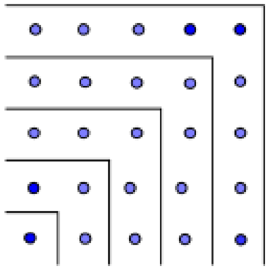
Desarrollo de contenidos y consideraciones didácticas

Trabajo con expresiones algebraicas

- Se estimulará el reconocimiento de patrones en secuencias y generalizaciones proponiendo situaciones que se solucionen encontrando expresiones para el enésimo término de una sucesión.

Ejemplo 35: "Con visualización"

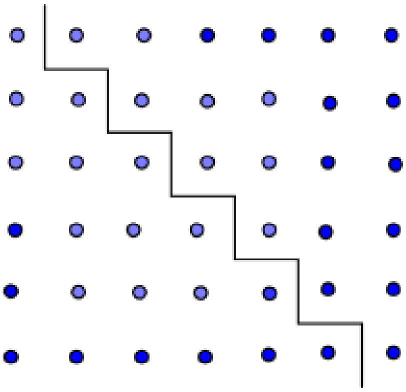
El siguiente dibujo representa un patrón de esquinas que permite encontrar la suma de los n primeros números naturales impares:



$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

El siguiente patrón permite encontrar la suma de números naturales sucesivos



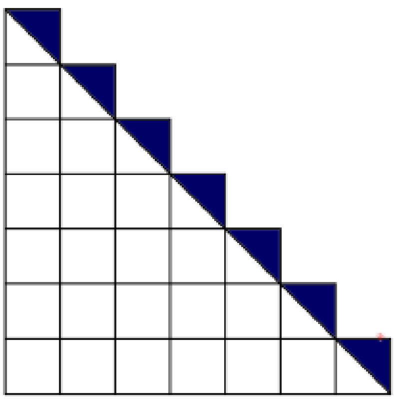
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 1/2\ 6 \times (6 + 1)$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + n = 1/2\ n \times (n + 1)$

El siguiente patrón permite encontrar la misma suma mediante una expresión algebraica equivalente:

$1 + 2 + 3 + \ldots\ 7 = 7^2/2 + 7/2$

$1 + 2 + 3 + \ldots\ n = n^2/2 + n/2$



Funciones: fórmulas, tablas y gráficos

- Se retomará el trabajo iniciado en segundo año en relación con las funciones, presentándolas a través de tablas, fórmulas y gráficos, y enfatizando que una función no se reduce solo a su forma de presentación sino que también son componentes de la misma su dominio y su conjunto de llegada. Para ello, se podrá proponer la resolución de situaciones en las que se muestren las diferencias entre funciones con la misma fórmula definidas en diferentes conjuntos numéricos.
- Se continuará trabajando con el pasaje de una forma a otra forma de expresión de las funciones. Por ejemplo, se podrá proponer la construcción del gráfico cartesiano de funciones presentadas a partir de tablas o fórmulas y, también, la expresión mediante las fórmulas de funciones lineales presentadas a través de sus representaciones gráficas.
- Para realizar representaciones gráficas, si fuera posible, se utilizarán programas graficadores que permiten analizar detalles de las mismas. La tecnología brinda formas dinámicas de representación, que en comparación con las habituales, permiten ahorrar tiempo y centrar la atención en la resolución de los problemas y no en el trabajo mecánico, lo que enriquece la comprensión. Sin embargo, si el uso de la computadora es excesivamente frecuente y monótono, se corre el riesgo de que este objetivo se pierda de vista. Dependerá del modo en que la tecnología sea incluida en la propuesta pedagógica que esto no ocurra.
- Se analizarán los *desplazamientos* de la representación gráfica de una función en el plano cartesiano a partir de algunos cambios en su fórmula, de modo que los alumnos puedan predecir, conociendo la representación gráfica de una función f, la representación de otra función que sea una transformación de la misma. Se podrá retomar la tarea realizada en segundo año en relación con la representación gráfica de la función módulo y sus transformaciones. También se propondrá la representación gráfica y el *desplazamiento* de curvas que representan funciones de graficación sencilla como $f(x) = x$ y $f(x) = x^2$.
- Si fuera posible el trabajo con graficadores de funciones, se podrá lograr que los alumnos visualicen los comentados desplazamientos de funciones cuyas gráficas son más complejas de realizar en forma manual. Se espera que a través de la tarea propuesta obtengan conclusiones en relación con la representación gráfica de funciones. (Ver Anexo II).
- Se retomarán las nociones de proporcionalidad directa e inversa construidas en los años anteriores para trabajar con la forma de expresar la variación proporcional en términos algebraicos. También se trabajará la expresión de una cantidad como porcentaje de otra.
- Se retomará también el estudio de la ecuación general de la recta y se construirá la ecuación de la recta que pasa por un punto conociendo la pendiente. Se analizarán las ecuaciones de rectas paralelas e incidentes buscando similitudes y diferencias, de modo de establecer las condiciones para que dos rectas sean paralelas o perpendiculares.

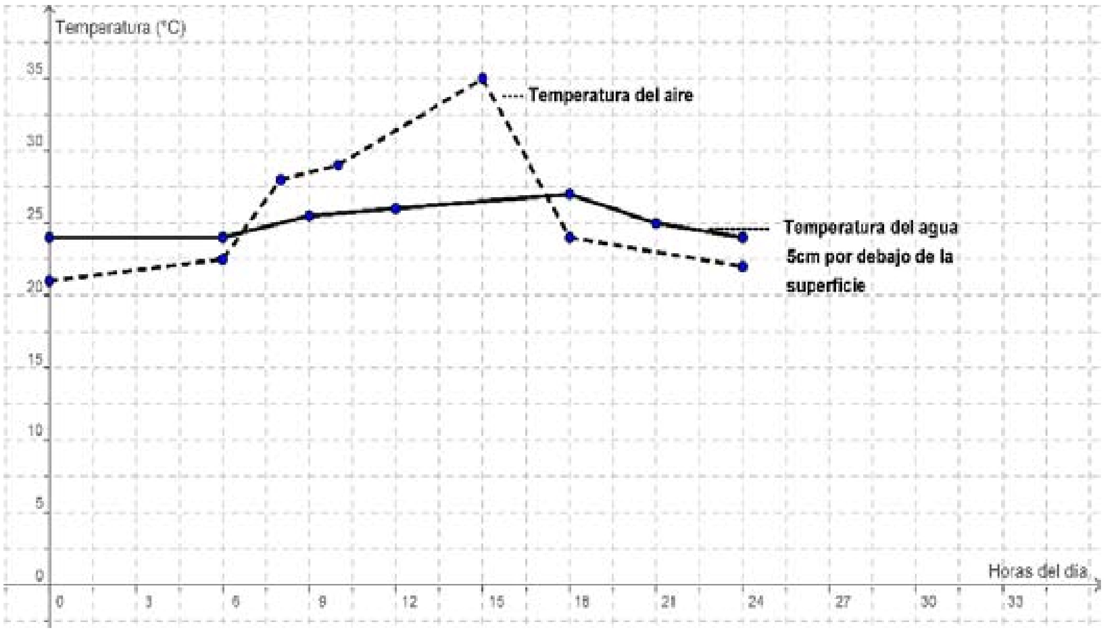
Estudio de funciones

- Se trabajará con las funciones como modelos matemáticos de situaciones. Se analizarán cualitativamente máximos y mínimos relativos y absolutos, ceros, intervalos de crecimiento y decrecimiento, describiendo la representación gráfica de la función y expresando las conclusiones obtenidas en términos de la situación modelada.

Ejemplo 36:

La siguiente representación gráfica muestra la variación de la temperatura en un lago tropical en relación con la temperatura ambiente del lugar durante un día.

El gráfico con línea punteada muestra la variación de la temperatura ambiente y la línea llena muestra la variación de la temperatura en el lago medida a 5 cm debajo de la superficie del agua.



La información que surge del gráfico puede resumirse de la manera siguiente:

El agua puede absorber calor del sol sin que su temperatura aumente repentinamente, y se comporta del mismo modo al perder calor: su temperatura no disminuye bruscamente.

No sucede lo mismo con la temperatura ambiente cuya gráfica presenta variaciones más acentuadas.

Es importante destacar que, si bien los datos son discretos, los gráficos muestran un modelo con variable real; esta licencia es la que permite apreciar mejor las conclusiones.

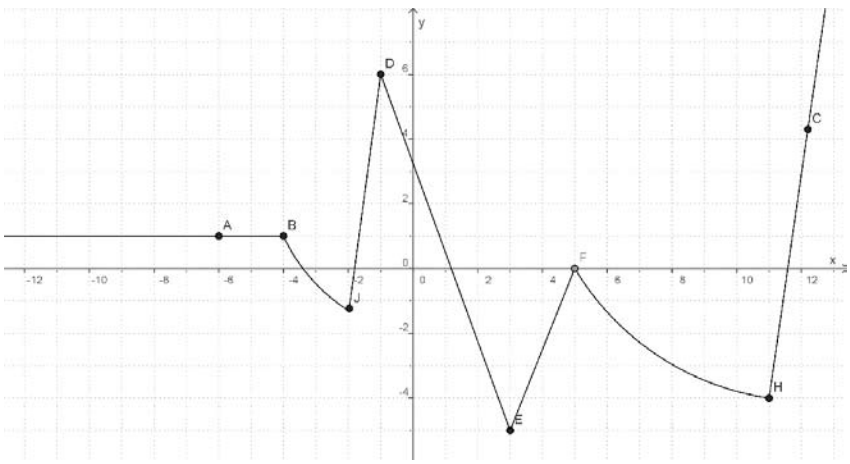
Si se analizan y comparan los valores máximos de ambas funciones podrá concluirse que en el agua se registran los cambios de temperatura con posterioridad a los registrados en el aire: a las 15 hs se registra el máximo en el aire y el valor máximo se registra en el agua recién a las 18 hs Estos valores son máximos absolutos ya que las temperaturas registradas en otras horas son menores.

Este análisis descriptivo de la situación a partir del gráfico difiere del tratamiento habitual principalmente en que la relación entre las horas del día y la temperatura no responde a una expresión algebraica determinada.

- Si fuera posible mediante el uso de programas graficadores o, si no, a partir de representaciones gráficas elaboradas por el docente, puede realizarse el análisis de funciones que no sea posible expresar a través de una fórmula pero en las que se puedan visualizar con claridad máximos y mínimos (relativos y absolutos), ceros, intervalos de positividad y negatividad, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, conjunto imagen. Por ejemplo en la siguiente función de dominio R:[4]

[4] Se ha representado la porción más significativa de la gráfica de la función.

Ejemplo 37:



Sobre esta función los alumnos podrán observar que:

- Es constante para los valores de x menores que -4.
- Es decreciente para los valores de x comprendidos entre -4 y -2; entre -1 y 3; y entre 5 y 11.
- Es creciente para los valores de x comprendidos entre - 2 y -1 ; 3 y 5; y para valores de x mayores que 11.
- Tiene un máximo relativo en el punto (-1 ; 6).
- Alcanza un mínimo relativo en el punto (3 ; -5). Este, a su vez, es un mínimo absoluto ya que y = -5 es el menor valor que toma la función.
- Alcanza un máximo relativo en el punto (5 ; 0). Este valor también es un cero de la función.
- Alcanza un mínimo relativo en el punto (11; -4).
- El gráfico corta al eje x en cinco puntos que son los ceros de la función.
- El conjunto imagen de la función es el intervalo $[-5 ; +\infty)$.

Se podrán realizar, paulatinamente, algunas traducciones al lenguaje simbólico, sin perder de vista que la formalización de estos conceptos recién se alcanzará en los niveles superiores de la educación secundaria. Las traducciones podrán ser parciales, es decir que se podrán intercalar partes del texto en forma coloquial. Por ejemplo, la primera proposición podría expresarse como:

“la función es constante $\forall$ x < 4”.

- Una vez que los alumnos se encuentren en condiciones de realizar análisis de funciones a partir de su gráfica, como en los casos anteriores, se les podrá proponer la realización de representaciones gráficas de funciones que verifiquen condiciones dadas. Se propondrán actividades del estilo de las siguientes:

Ejemplo 38:

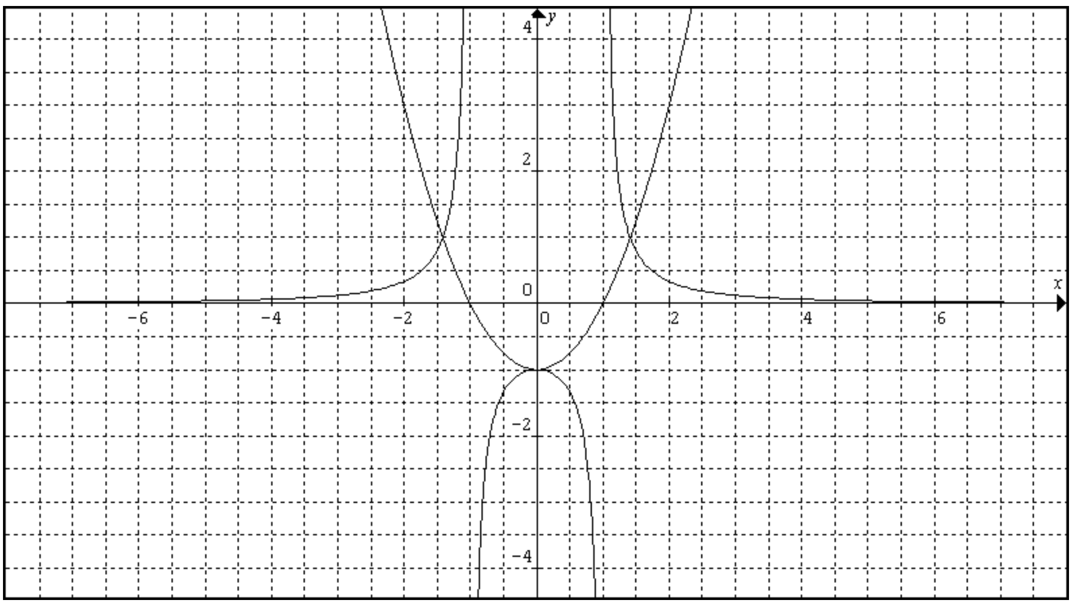
1. Representar gráficamente una función con dominio en el intervalo [-6 ; 10] que verifique las siguientes condiciones:
    - La función es creciente entre los valores de x mayores que -6 y menores que 1, es decir, en el intervalo[-6 ; 1).
    - La función alcanza un máximo relativo en el punto (1 ; 8).
    - La función es decreciente entre los valores de x mayores que 1 y menores que 7, es decir, en el intervalo (1 ; 7).
    - La función alcanza un mínimo relativo en el punto (7 ; -3).
2. Responder la siguientes consignas a partir de la representación realizada en el ítem
    - ¿La función representada tiene ceros?
    - ¿Cuál es el conjunto imagen de la función representada?
    - En el intervalo (7 ; 10], ¿la función crece, decrece, o es constante?

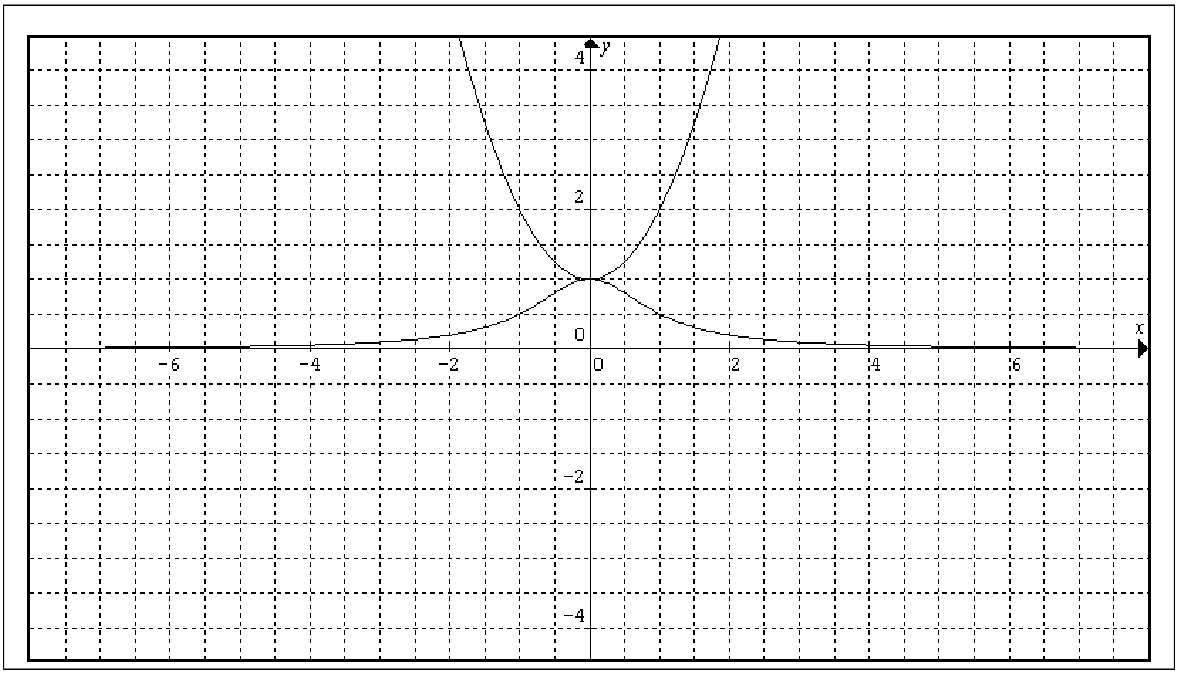
Ejemplo 39:

Dada la función f (x) = x^2 + 1.

- Representar f (x) en un graficador para responder las cuestiones que siguen (*).
- Analizar que ocurre para el valor x = 0.
- Describir lo que ocurre con el valor de la función para x entre -10 y 0.
- ¿qué ocurre con f (x) para x entre 0 y 10?
- Representar g (x) = 1 / (x^2 + 1) en un graficador para responder las cuestiones que siguen.
- ¿qué se puede afirmar respecto de g (x), para x = 0? ¿ y para g (x) cuando x está en el intervalo [-10 , 0]? ¿ y para g (x) si x pertenece al intervalo [0 , 10]?
- Con los datos del punto anterior justificar la forma de la curva que representa g(x) = 1 / (x^2 + 1)
- Realizar un estudio similar para si h (x) = 1 / (x^2 - 1).

Los siguientes gráficos han sido construidos con el programa *Graphmatica*. El primero muestra las funciones f (x) = x^2 + 1 y g (x) = 1 / (x^2 + 1) en relación. El segundo muestra las funciones l (x) = x^2 - 1 y h(x) = 1 / (x^2 - 1) en relación.





- Para las funciones trigonométricas: seno, coseno y tangente se construirán estrategias para la determinación de:
  - Las intersecciones de diferentes curvas con los ejes cartesianos.
  - Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
  - Continuidad.
  - Periodicidad.
  - Máximos y mínimos.

en representaciones gráficas construidas con programas graficadores.

Resolución de ecuaciones e inecuaciones

- Se continuará trabajando en el marco de la resolución de problemas evitando la automatización de reglas sin ningún significado para el alumno.
- Se retomará el trabajo iniciado en 2° año en cuanto al planteo y la resolución de ecuaciones. Se extenderá este análisis a ecuaciones con infinitas soluciones y sin solución.
- También en el marco de la resolución de problemas, se comenzarán a construir estrategias para encontrar el conjunto solución de inecuaciones sencillas trabajando tanto en forma analítica como gráfica.
- Se extenderá el estudio a la resolución de ecuaciones e inecuaciones sencillas en las que intervenga el módulo.

Ejemplo 40:

Encontrar el conjunto solución de:

- $|x| = 4$
- $|x| > 4$
- $|x| \leq 4$

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

• Se plantearán problemas que impliquen el planteo y la resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Ejemplo 41:

La resolución de problemas mediante la solución de sistemas de ecuaciones (la aparente redundancia permite anticipar la dificultad que representa este proceso) pone de manifiesto el significado de la modelización matemática:[5] el sistema de ecuaciones es un modelo matemático de la situación planteada en el enunciado del problema. En este modelo los datos que brinda el enunciado aparecen descontextualizados, trabajando con este modelo puede encontrarse la solución del problema original, para lo cual será necesario recontextualizar los resultados obtenidos. El siguiente ejemplo muestra estas cuestiones:

53 personas conforman un equipo que participará en un torneo deportivo. Todos jugarán simultáneamente fútbol o básquet contra otro equipo similar. En cada partido de básquet participan 5 personas y en cada partido de fútbol 11. La diferencia entre el triple del número de partidos de básquet y el número de partidos de fútbol es 9. ¿Cuál es el número de partidos de cada uno de estos deportes que se jugarán simultáneamente en el torneo?

El enunciado del problema no solo es extenso sino también un tanto complicado, por lo que resulta fácil perder de vista, en una primera lectura, el objetivo que se persigue.

Puede observarse que posiblemente para salvar en cierta medida estas dificultades, los datos con los que deberá trabajarse para construir un modelo algebraico de la situación aparecen bajo la forma de signos numéricos, lo que los hace fácilmente distinguibles.

De todos modos resulta un poco difícil darse cuenta de que en el torneo participan 106 personas, dato que se encuentra implícito en el enunciado y que resulta de especial interés para interpretarlo y emprender la resolución correctamente

Conviene, en primera instancia, releer el problema para interpretar la utilidad de cada dato, su interconexión y las incógnitas que propone determinar. Pueden hallarse claves para la construcción del modelo en la pregunta que plantea el problema: será necesario escribir la cantidad formal de partidos a jugar en función de los datos disponibles.

Resulta importante diferenciar dos tipos de datos diferentes: unos datos refieren al número de personas y otros al número de partidos. Esta heterogeneidad requiere la utilización de dos ecuaciones para modelizar la situación, cada una que vincule una especie de datos con las incógnitas del problema.

Estas cuestiones previas a la solución del sistema de ecuaciones, resultan de capital importancia y deben explicitarse mediante adecuadas intervenciones del docente con las que contribuya a establecer equivalencias entre la forma de expresión coloquial y la expresión algebraica en el modelo matemático propuesto.

Otro tema que merece especial atención es la explicitación de las incógnitas, su representación simbólica y el registro del significado de esos símbolos como paso previo a la construcción de las ecuaciones con los mismos. Esta explicitación, que parece obvia, no siempre se realiza y podría ser la razón por la que los alumnos suelen resolver el sistema de ecuaciones que modeliza la situación y abandonar allí la resolución del problema.

[5] Cuando se utiliza la expresión "modelizar" en el ámbito de esta materia, no se hace referencia a lo modélico tal como se utiliza en otras ciencias. En matemática llamamos modelizar a la creación de un modelo matemático para representar cierta situación intra o extra matemática. En este sentido, un par de segmentos paralelos pueden modelizar un tramo recto de las vías de un tren y no al revés.

En este caso puede utilizarse:

"b" *para simbolizar la cantidad de partidos de básquet que se juegan en el torneo y* "f" *para simbolizar la cantidad de partidos de fútbol que se juegan en el torneo.*

Como se ve, se ha preferido utilizar la inicial de cada deporte. Del mismo modo podrían utilizarse con las letras tradicionales "x", e "y", lo que reforzaría la idea de modelización matemática de la situación, pero a los efectos de simplificar el armado inicial de las ecuaciones, resulta conveniente usar letras que se correspondan al nombre de las incógnitas que se desea develar:

Ecuación 1:

$$5b + 11f = 53 \quad (1)$$

Esta primera ecuación expresa el número total de participantes del torneo "en función" de los números de partidos de cada deporte que deberán jugarse simultáneamente.

Ecuación 2:

$$3b - f = 9 \ (2)$$

Esta segunda ecuación expresa algebraicamente la información que brinda el enunciado acerca de una relación entre las cantidades de partidos de cada deporte que se jugarán al mismo tiempo (no se harán comentarios acerca de lo significativo o no de la relación elegida por el autor, por lo pronto lo presentado es representativo de un estilo de problemas escolares muy frecuente en publicaciones recomendadas a los alumnos).

A los efectos de mostrar las consecuencias de la modelización matemática, se escribirán ecuaciones formales a partir de las que se han construido (los alumnos suelen trabajar con las ecuaciones construidas inicialmente aunque en ocasiones quieren escribir las ecuaciones con x e y por considerarlas *mejores*)

El sistema de ecuaciones descontextualizadas que modeliza la situación planteada por el problema es:

$$\begin{aligned} 5x + 11y &= 53 \\ 3x - y &= 9 \end{aligned}$$

Aparece algo evidente pero no por ello menos importante: se ha agregado un nuevo símbolo que completa la modelización: ambas ecuaciones se encuentran abarcadas por una llave. Esto significa que las soluciones que se encuentren para las incógnitas x e y deben ser tales que sirvan para las dos ecuaciones, es decir que las conviertan en proposiciones verdaderas al mismo tiempo. Este hecho, si bien es evidente cuando se considera la resolución del problema, no lo es dentro de la modelización matemática, en la que este símbolo cobra especial importancia para establecer esa relación entre las dos ecuaciones.

Finalizada esta etapa en la que se ha determinado el modelo matemático del que se encontrará la solución para tratar de solucionar el problema, es necesario decidir la forma en la que se buscará esa solución. Tradicionalmente se estudiaron cuatro métodos para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas sin recurrir al tanteo, uno gráfico y tres algebraicos:

- el método gráfico;
- el método por sustitución (el de igualación es un caso especial de este método);
- el método por sumas y restas;
- el método por determinantes.

Resulta interesante considerar que si bien se han considerado los datos como de *especies distintas* el modelo matemático exige ajustar el tipo de números que se aceptarán como solución del sistema a una característica que comparten tanto los datos como las soluciones esperadas. En ambos casos se trata de cantidades *discontinuas*, es decir, que pueden contarse. Este tipo de cantidades se modelizan con números naturales, por lo tanto la solución del sistema de ecuaciones deberá ser un par de números naturales.

Este modelo (los números naturales) limita las posibilidades de resolver el sistema por el método gráfico, salvo que se acepte representar un par de funciones lineales con dominio en R para observar si existe un punto que pertenezca a ambas gráficas y además verificar que ese punto tenga coordenadas naturales. Esta modelización de un sistema de ecuaciones que a su vez modeliza la situación del problema, parece introducir más complicaciones que ventajas. Es posible que un modelo de tipo algebraico resulte menos engorroso.

La razón de la existencia de tres métodos algebraicos no responde a cuestiones pedagógicas. Se trata de tres algoritmos que permiten la solución más o menos rápida de sistemas de ecuaciones que se presentan con determinadas características, es decir reglas mecánicas que no tienen que ver con razonamiento alguno. En realidad, los tres métodos responden a la misma idea: eliminar una de las incógnitas.

La idea de expresar todo el sistema *en función* de una sola incógnita es la puesta en marcha de un método característico de la matemática: llevar situaciones desconocidas a la forma de otras conocidas para encontrar la solución.

El método por sustitución es indicado para resolver sistemas en los que una de las incógnitas se encuentra *despejada*. El llamado "método por igualación" es un caso particular de sustitución indicado para el caso en el que en ambas ecuaciones figure despejada la misma incógnita. Si bien todo sistema puede llevarse a este caso mediante un poco de trabajo algebraico, existen otros métodos para resolver el sistema sin realizar trabajo previo con las ecuaciones.

El método por sumas y restas (basado en el método de Gauss-Jourdan) es aplicable para resolver sistemas de ecuaciones en las que ninguna variable se encuentra despejada. La resolución implica sumar o restar miembro a miembro las ecuaciones con el objetivo de eliminar una de las incógnitas. Esto no siempre es sencillo, en especial cuando los correspondientes coeficientes que acompañan a las incógnitas son primos relativos. En ese caso, ambas ecuaciones deben multiplicarse por factores adecuados que permitan igualar los coeficientes de por lo menos una de las incógnitas en ambas ecuaciones. Obviamente cualquier sistema de ecuaciones puede llevarse a condiciones adecuadas para utilizar este método con un adecuado trabajo algebraico.

Por último, el método por determinantes puede usarse también para resolver cualquier sistema de ecuaciones, en especial los que no se resuelven directamente por el de sumas y restas ya que solamente requiere cierta habilidad para reconocer diferente tipos de coeficientes (los que acompañan a las incógnitas y los *independientes*).

Se ha descripto la utilidad de cada método, es el docente quien deberá decidir acerca del tratamiento del tema de la resolución de sistemas de ecuaciones. Solo se agregará a este respecto que, si bien al comienzo del tratamiento del tema, tradicionalmente se clasifican los sistemas de ecuaciones de acuerdo a la existencia o no de soluciones, esta clasificación se asienta sobre el método gráfico, pero se descuida el estudio de lo que esta clasificación implica cuando se trabaja con otros métodos. Así, los sistemas que se pide resolver por métodos diferentes del gráfico, por lo general, son compatibles determinados, con la esperable interpretación por parte de los alumnos de cláusulas inadecuadas en el contrato didáctico.

Por el método de sumas y restas la solución del sistema será:

$$\begin{array}{rl} & 5x + 11y = 53 \\ + & \\ & 33x - 11y = 99 \\ & 38x \quad = 152 \end{array}$$

Se ha multiplicado la segunda ecuación por 11 y sumado miembro a miembro.

Luego:

$x = 4$

En el contexto del problema esto significa que se juegan 4 partidos de básquet. Es inmediato que jugándose 4 partidos de básquet los jugadores del equipo involucrados son 20, quedando 33 integrantes para jugar 3 partidos de fútbol.

Pero por lo general no es en este momento en el que se contextualizarán los resultados obtenidos.

La resolución del sistema modelo aún no está completa: falta calcular el valor de y. Los alumnos acostumbran continuar con la resolución mecánica del sistema, es muy factible que reemplacen el valor obtenido en la segunda ecuación porque aparenta ser "más fácil", esto es requeriría menos cálculos. Convendrá entonces prever determinados errores que pueden aparecer de manera de planificar las intervenciones que resulten pertinentes en cada caso.

Por este camino la resolución correcta es:

$$\begin{aligned} 3x - y &= 9 \\ 3.4 - y &= 9 \\ -y &= 9 - 12 \\ -y &= -3 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Un alumno trabaja así:

$$\begin{aligned} 3.4 - y &= 9 \\ y &= 9 + 12 \\ y &= 21 \end{aligned}$$

Ya que "aquello que está restando pasa sumando", además la solución no resulta descabellada para el alumno porque el número obtenido es natural.

En este caso la primera intervención deberá ayudar al alumno a contextualizar este resultado en el problema y, una vez reconocida la imposibilidad de que sea correcta, convendrá colaborar con el alumno para encontrar el error que arrojó como solución, para lo que habrá que revisar las características de las operaciones no conmutativas y los cuidados con los que deben resolverse las ecuaciones que las involucran. Para ello deberán presentarse ejemplos numéricos que permitan construir estrategias para este fin.

Un alumno lo resuelve de otro modo:

$$\begin{aligned} 3.4 - y &= 9 \\ y &= 9 - 3.4 \\ y &= -3 \end{aligned}$$

Con lo que concluye que el sistema tiene solución pero no el problema.

En este caso habrá que establecer un diálogo con el alumno para determinar las causas por las que *pierde* el signo de y. Si bien este error debería ser poco frecuente gracias al trabajo realizado en los años anteriores, en el marco del presente Diseño nos referiremos a su tratamiento ya que puede ser necesario.

Una de las razones por las que sucede esto es el sutil cambio que se produce en el significado del signo. En un principio el signo "-" corresponde a una sustracción, a continuación, y sin previo aviso, pasa a ser el signo de un número, lo que para el docente puede resultar claro pero no para el alumno. Una posible intervención es presentar la resolución de la ecuación mediante la composición con los opuestos:

$3.4 - y = 9$

$12 - y = 9$

$12 - 12 - y = 9 - 12$

$0 - y = -3$

$- y = -3$

En el último paso se advierte el *cambio del signo* mencionado, con lo que el alumno se encuentra ya en condiciones de establecer estrategias para solucionar este tipo de ecuaciones.

Pero todavía falta interpretar esta solución del modelo, por lo que todavía hace falta hacer referencia a otro significado del signo "-".

La expresión significa que "el opuesto de y es –3" de allí se deduce que y = 3, pero quizá el alumno ya haya escrito que :

$3 = y$

con lo que solucionó el problema "pasando cada miembro del otro lado".

Obsérvese que todo este proceso engorroso, producto de la aplicación mecánica de un método de resolución de sistemas de ecuaciones, puede sortearse contextualizando antes los resultados del modelo.

Finalizado el proceso de resolución no debe olvidarse la construcción de una respuesta para la pregunta del problema, ya que finalmente es el objetivo de todo el emprendimiento:

Respuesta: "Se realizan simultáneamente 4 partidos de básquet y 3 de fútbol".

Sin este último paso el problema debe considerarse incompleto y, como se ha expresado antes, la contextualización brinda la oportunidad de revisar la pertinencia de la solución encontrada.

Uso de la calculadora científica para la resolución de sistemas de ecuaciones[6]

Ejemplo 42:

A modo de ejemplo se retomará el sistema que modeliza la situación que plantea el problema para resolverlo mediante el uso de calculadoras:

$5x + 11y = 53$

$3x - y = 9$

Se pulsa en la calculadora la tecla MODE hasta que aparece en el visor:

EQN

1

A continuación pulsamos el número 1 con lo que aparecerá en el visor:

UNKNOWNS?

2 3

Es decir, la calculadora pregunta por el número de incógnitas del sistema, en nuestro caso pulsamos 2.

Luego de hacerlo, la calculadora preguntará por los coeficientes de las ecuaciones:

[6] fx-95MS o similares.

a_1? (coeficiente de la x en la primera ecuación), pulsamos 5 y luego =

b_1? (coeficiente de la y en la primera ecuación), pulsamos 11 y luego =

c_1? (coeficiente independiente de la primera ecuación), pulsamos 53 y luego =

Mediante idéntico procedimiento se cargan los coeficientes de la segunda ecuación:

a_2? 3 =

b_2? -1 =

c_2? 9 =

En el visor aparecerá:

x =

4

y luego pulsando la tecla =

y =

3

Se recomienda investigar esta función en otras calculadoras.

- Se trabajará con la determinación de diferentes pares de valores que verifican las condiciones de un problema cuando el mismo tiene infinitas soluciones, así como con el análisis del significado de un conjunto solución con estas características:

Ejemplo 43:

¿Será posible encontrar pares de números tales que su suma y su producto sean iguales? Si la respuesta es afirmativa indicar todos los valores que verifican la condición.

Con algunos ejemplos es posible comprobar que existen pares de números que satisfacen lo preguntado:

2 + 2 = 2 x 2

3 + 1,5 = 3 x 1,5

-3 + 0,75 = -3 x 0,75.

Pero los ejemplos no nos permiten saber cuántas soluciones tiene este problema. Para encontrar esta respuesta, lo más adecuado es plantear un modelo matemático de la situación que nos permita determinar en forma general sus soluciones. La traducción algebraica de las condiciones dadas resulta:

x . y = x + y

De donde, agrupando en un mismo miembro y sacando factor común resulta:

x . y – y = x
y . (x – 1) = x
Por lo que y = x /(x – 1)

De acuerdo con esta igualdad, para encontrar pares de números que verifiquen lo expresado en el enunciado, será necesario buscar números que sean iguales al cociente entre un número y su anterior. Para ello se podrá darle valores a x (la variable independiente) para obtener valores de y (la variable dependiente) que verifiquen que sumados a los valores de x dados den el mismo resultado al sumarlos y multiplicarlos. Por ejemplo, si x = -7, y = - 7/ (-7 -1) = 7/8 = 0,875. Se podrá proponer a los alumnos la construcción de una tabla en la que se obtengan otros pares de valores que verifiquen la condición.

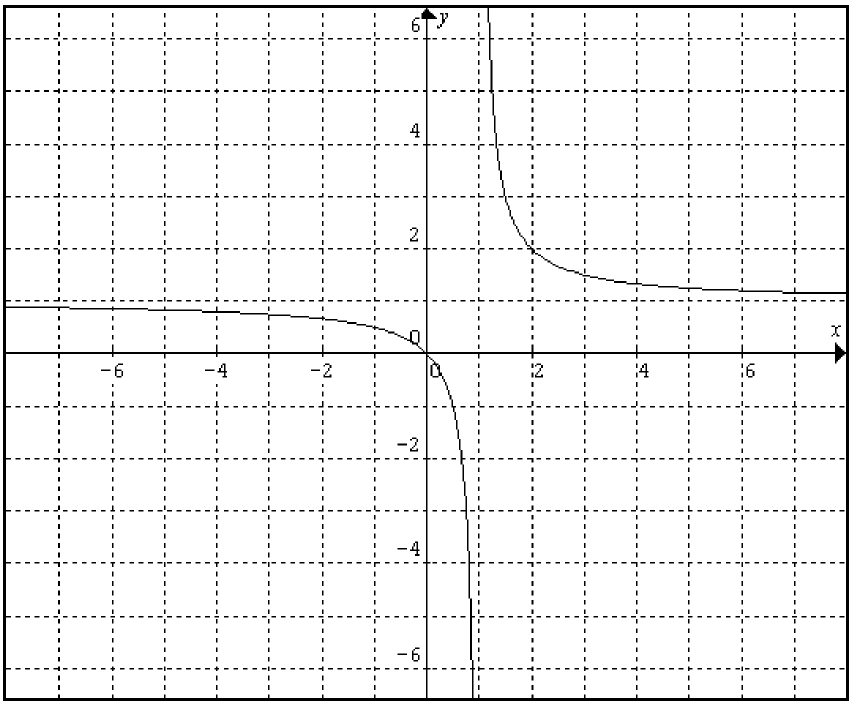
A medida que se van obteniendo pares de valores se irán realizando observaciones acerca del comportamiento de las variables. Por ejemplo, a medida que los valores de x crecen, los valores de y decrecen. También se podrá preguntar si esto continuará de este modo para todos los valores de x.

Si no surgiera en ninguna de las tablas de valores construidas por los alumnos, el docente podrá proponer el análisis de qué ocurrirá si x = 1 para retomar el problema del cero en las operaciones.

Luego de la construcción de la tabla y del análisis del comportamiento de las variables resultará evidente que las soluciones a este problema son infinitas.

Será interesante trabajar con el significado de esta idea, dado que los alumnos suelen pensar que el hecho de que el problema tenga infinitas soluciones implica que cualquier par podría ser solución.

En este sentido convendrá intervenir para que asocien esta afirmación con el gráfico cartesiano donde se evidencia que las infinitas soluciones pueden graficarse como el conjunto de puntos que pertenecen a una hipérbola. Para esto se puede recurrir a graficadores como *Graphmatica* que permiten realizar este trabajo muy rápidamente.



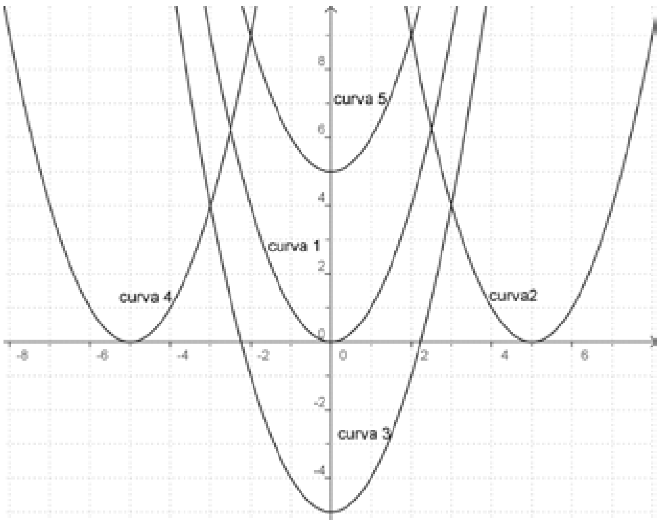
Orientaciones para la evaluación

Para evaluar algunos de los contenidos de este eje se podrán proponer actividades como la siguiente:

Ejemplo 44:

En el siguiente gráfico cartesiano se han representado 5 funciones mediante las curvas 1 a 5.

Una de las curvas dibujadas corresponde a la función $y = x^2 + 5$ *y otra a* $y = (x + 5)^2$ *¿Cuál es cada una? Justificar la respuesta.*



El problema planteado puede solucionarse mediante la aplicación de diferentes estrategias.

Bajo una apariencia sencilla se trata de evaluar el uso de la anticipación por parte de los alumnos. Frecuentemente los alumnos asocian la suma de constantes con un *desplazamiento de las curvas en sentido positivo*, es decir hacia arriba o hacia la derecha.

Una respuesta apresurada podría incluir un error diciendo que la curva 2 es la que representa la segunda función, "ya que la forma es idéntica a la de la 1 pero se encuentra desplazada 5 unidades a la derecha". Sin embargo, la construcción de una tabla permite reconocer que la respuesta correcta es la curva 4.

El pedido de la justificación de la respuesta refuerza la necesidad de construir argumentos entre los que la tabla de valores puede aparecer como necesaria en algunos casos.

En la clase que se destine a analizar los ejercicios de la prueba (que en lo posible debería ser la siguiente a la de la misma), el docente promoverá discusiones en las que estas cuestiones se manifiesten para poder abordarlas.

Para que el alumno logre resolver este tipo de actividades correctamente, el docente deberá haber intervenido para detectar la existencia de este tipo de supuestos, por ejemplo del modo siguiente:

Ejemplo 45:

Un alumno que va a otra escuela dice :

-" en las funciones si se le suma una constante a toda la curva, esta va a estar más arriba que si esa constante no estuviera, por ejemplo $y = x^3 + 2$ queda más arriba que $y = x^3$"

¿Estará bien?

¿Cómo nos damos cuenta?

¿Qué diferencias hay en las tablas de valores?

¿Qué sucederá con $y = x^3 - 1$?

Si bien la situación se ha presentado en la forma en la que los alumnos suelen expresarse, el docente podrá intervenir para mejorar las expresiones que considere necesario.

El mismo alumno dice que si la constante se suma solamente a la x, la curva se desplaza a la derecha, por ejemplo $y = (x+1)^3$ está a la derecha de $y = x^3$ en el gráfico.
¿Estará bien?
¿Cómo nos damos cuenta?
¿Qué diferencias hay en las tablas de valores?
¿Qué sucederá con $y=(x-1)^3$?

Sería interesante que, si se dispone de los recursos informáticos necesarios, esta discusión se produzca con al menos una computadora y un graficador como *Graphmatic*a a mano para agilizar las representaciones gráficas y la construcción de tablas de valores de diferentes funciones, ya que si bien son recursos de importancia para la tarea propuesta, su construcción no representa lo central de la misma.

Es importante considerar los *desplazamientos* de las curvas como una cuestión central de indudable utilidad propedéutica que por lo general no se vuelve a trabajar en otro momento. No son detalles sin importancia para los alumnos. Con el tiempo estas cuestiones se dan por sabidas sin que se las haya abordado adecuadamente.

Es necesario recordar que los alumnos se encuentran dando los primeros pasos en el análisis de funciones y en esta etapa se debería explicitar hasta lo que el docente considere más obvio con el objeto de construir bases sólidas sobre las que se pueda trabajar más adelante con cuestiones puntuales de los distintos tipos de funciones particulares, tanto en el ciclo superior de la ES como en los estudios superiores que incluyan la matemática en sus programas.

Eje Probabilidades y Estadística

Cuando se realizan trabajos escolares de investigación, planificación o estudio de comportamientos de variables de análisis estadístico, se hace necesario contar con herramientas para crear modelos capaces de permitir, bajo ciertas condiciones, la realización de predicciones, proyecciones e inferencias acerca de las problemáticas investigadas. En la actualidad estas herramientas, que son desarrolladas por la probabilidad y la estadística, resultan de mucha utilidad en casi todas las disciplinas.

En 3º año, se profundizará el trabajo realizado en 1º y 2º años respecto del análisis de situaciones de diversos órdenes trabajando con variables cuantitativas discretas y continuas.

Al resolver las situaciones que se propongan, se analizarán los resultados encontrados con la finalidad de obtener conclusiones y hacer predicciones en relación con las mismas.

Se construirán herramientas de combinatoria para la determinación de espacios muestrales con miras a ampliar los conocimientos construidos de estadística y probabilidad.

Núcleos sintéticos de contenidos

- Estadística. Análisis descriptivo.
- Combinatoria.
- Probabilidad.

Desarrollo de contenidos y consideraciones didácticas

Estadística. Análisis descriptivo

- Se retomará el trabajo realizado en los años anteriores, empleando encuestas significativas para el grupo de alumnos. Se les pedirá que organicen la presentación de los datos mediante tablas y gráficos eligiendo la forma más adecuada para cada caso. Se trabajará con la construcción de gráficos circulares utilizando proporcionalidad directa para calcular las medidas de los ángulos centrales de los mismos. Se analizarán las ventajas y desventajas de este tipo de gráficos respecto de otros como los diagramas de barras y los pictogramas.

- Se profundizará el trabajo con las medidas de tendencia central de una distribución -media, mediana y moda- analizando su representatividad y sus limitaciones para describir los datos de la muestra y tomar decisiones a partir de ellas.
- Se propondrá la utilización de las funciones estadísticas de las calculadoras científicas.
- Para situaciones en las que la variable correspondiente sea cuantitativa y continua, se trabajará con la organización de los datos por intervalos, estudiando la forma de realizarlo y analizando criterios que permitan hacer la agrupación de manera adecuada. Se analizará la frecuencia absoluta en intervalos y se confeccionarán los gráficos que permitan la visualización de este tipo de agrupación, es decir, los histogramas.
- Se determinará la moda y la media de distribuciones agrupadas en intervalos.
- Se propondrán situaciones que permitan construir estrategias para el cálculo de la media para este tipo de distribuciones. Se comparará el valor de la media obtenida utilizando todos los datos individuales de la muestra y el valor calculado usando las marcas de clase de los intervalos en algunos ejemplos donde esto sea posible. En la puesta en común se analizarán las ventajas de realizar el cálculo utilizando las marcas de clase, aunque se pierda algo de precisión.
- Se calculará la frecuencia absoluta acumulada tanto para distribuciones con variable cuantitativa discreta como continua. Se confeccionarán diagramas de frecuencias acumuladas y se analizará la utilidad de los mismos.
- Se abordará el estudio de algunos temas específicos como el Índice de Desarrollo Humano o el Índice de Esperanza de Vida.

Ejemplo 46:

El Índice de Desarrollo Humano (IDH) tiene como objetivo la obtención de información para medir y comparar el desarrollo humano alcanzado por distintos países. Este índice se elabora teniendo en cuenta tres indicadores: la longevidad, la educación (poseer los conocimientos necesarios para comprender y relacionarse con el entorno social) y el estándar de vida (tener ingresos suficientes como para acceder a un nivel de vida adecuado).[7]

Fuente: Elaboración propia en base a la EPH (INDEC).

1º sem 2004

Provincia	Educación	Longevidad	Subsistencia	Índice de desarrollo humano
Ciudad de Buenos Aires	0,9244	0,8215	0,7622	**0,8360**
Buenos Aires	0,8979	0,8282	0,6300	**0,7854**
Catamarca	0,8971	0,8188	0,5856	**0,7672**
Córdoba	0,9047	0,8343	0,6267	**0,7886**
Corrientes	0,8992	0,8193	0,5575	**0,7586**
Chaco	0,9001	0,7997	0,5657	**0,7552**

[7] Información disponible en http://www.desarrollohumano.org.ar/2005.

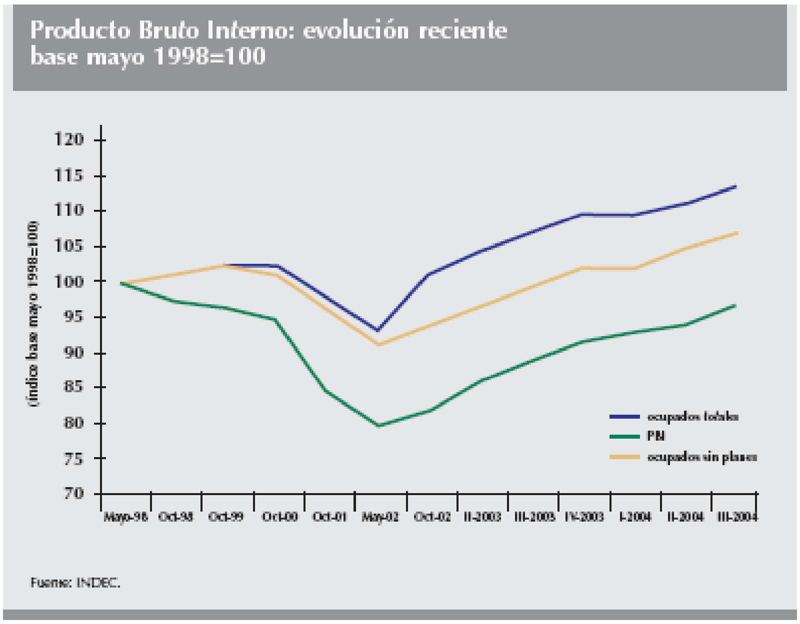
Con la información del cuadro:

- Verificar en alguna de las provincias que el IDH se obtiene a partir del promedio de los tres indicadores.
- Analizar por qué Córdoba, teniendo mayor índice de longevidad, tiene menor IDH que la Ciudad de Buenos Aires.
- Buscar quiénes tienen los mayores valores de cada uno de los tres indicadores.

Ejemplo 47:

El Producto Bruto Interno (PBI) es el valor de todos los bienes y servicios finales que produce un país en cierto tiempo. Comprende valores de viviendas, comercios, servicios, gobierno y transporte, entre otros.

Realizar un informe de la evolución del PBI desde mayo de 2002 hasta el tercer trimestre de 2004 a partir del gráfico siguiente*:



Informe de Desarrollo Humano 2005

* El gráfico original es en color, por lo que las curvas en blanco y negro no se distinguen correctamente. La superior corresponde a "ocupados totales", la central a "ocupados sin planes" y la inferior al PBI.

Combinatoria

- Se retomará el trabajo realizado en 2º año con diagramas de árbol para el estudio de las permutaciones. Mediante el planteo de problemas con pocos elementos, en los que se pueda trabajar con este tipo de diagramas, se determinará la pertinencia del uso de permutaciones, variaciones y combinaciones para la solución de los mismos.

Para realizar este trabajo se podrán proponer situaciones como las que siguen, en las que se pueden contar todas las posibilidades. Se propone realizar un uso comprensivo de las fórmulas. Para que esto ocurra, las mismas deberán ser presentadas luego de un trabajo de construcción realizado previamente por los alumnos y como una forma más económica de resolución en términos de procedimientos.

Ejemplo 48:

Una agrupación estudiantil debe decidir en qué orden aparecerán los 5 candidatos/as a delegados/as que debe incluir en su lista para las próximas elecciones en el centro de estudiantes. Por la experiencia de elecciones anteriores estima que 3 de ellos tendrán posibilidades ciertas de ingresar en la comisión directiva del centro. Es decir que solo los 3 primeros candidatos de la lista podrán acceder a esos puestos ¿De cuántas maneras diferentes pueden ordenarse los 5 candidatos de la agrupación en esos 3 primeros puestos de la lista?

Se propondrá la construcción de un diagrama de árbol que permita contar todas las posibilidades, y a partir del análisis del mismo se trabajará en la construcción de una fórmula que permita realizar el cálculo anterior de manera más económica. El docente, al cierre de la actividad, denominará variaciones de 5 elementos tomados de a 3 al cálculo realizado y generalizará la fórmula obtenida para el cálculo de variaciones de n elementos tomados de a m.

- Se propondrá la utilización de distintos modelos de calculadoras científicas para el cálculo de variaciones y combinaciones, analizando las funciones específicas que el modelo pudiera tener.

En una clase de síntesis previa a una prueba, por ejemplo, se podrá proponer el siguiente problema que permite analizar algunos posibles errores en el trabajo con variaciones y combinaciones:

Ejemplo 49:

¿Cuántos partidos de básquet se jugarán en una liga de 10 equipos si cada uno debe jugar dos veces contra cada uno de los demás?

Se podrá solicitar que cada alumno trabaje con el problema en forma individual, registrando en una hoja lo que vaya haciendo como si se tratara de una evaluación escrita. Es decir, se le pedirá que escriba todo lo que tiene en cuenta para resolver. El docente irá revisando lo que los alumnos vayan anotando para comentarlo en la puesta en común.

Para solucionar este problema deben calcularse todas las combinaciones de los diez equipos tomados de a dos (de manera de obtener la cantidad de encuentros que deben jugarse para que todos los equipos jueguen contra todos) y luego multiplicar por dos ya que los equipos deben encontrarse dos veces con cada contrincante.

El cálculo da como resultado:

Cantidad de partidos = $2 \cdot C_{10,2} = 2 \cdot \dfrac{10!}{(10-2)!2!} = 2.\dfrac{10!}{8!2!} = 10.9 = 90$

Es decir, se jugarán 90 partidos.[8]

Este resultado es el mismo número que podría obtenerse si se calculara la cantidad de variaciones de los 10 equipos tomados de a dos ($V_{10,2}$). Esto significa que, si un alumno calculara las variaciones de los 10 equipos tomados de a dos, obtendría también 90 partidos como resultado. Pero, realizar el cálculo de esta forma, ¿sería también correcto?

Ciertamente se trata de una coincidencia, debida a los números con los que se está trabajando y al contexto en el que se utilizan.

La coincidencia podría estar vinculada al hecho de que los equipos deban jugar dos partidos contra cada rival. Puede pensarse que, por ejemplo, primero jugará A contra B y luego B contra A. Si un alumno explicara esto y calculara las variaciones, su respuesta debería considerarse correcta, pero el docente deberá intervenir para hacer notar al alumno que, si en lugar de tener que jugar dos partidos, tuvieran que jugarse tres, las cosas serían distintas y los resultados no coincidirían.

La coincidencia también podría ser consecuencia de un razonamiento incorrecto. El alumno podría estar confundiendo el cálculo que debe realizar para resolver el problema.

Por lo general la mayor dificultad con la que tropiezan los alumnos cuando intentan resolver situaciones de este tipo mediante el uso de fórmulas es determinar la necesidad de considerar el orden o no, de manera de poder identificar si se trata de una variación o de una combinación. Más allá de su nombre o de la fórmula que se utilice para resolver un problema, se debe fomentar la comprensión conceptual de cada una de las formas de contar.

Es posible también que el alumno anote, como toda respuesta, que la cantidad de partidos a jugar es 90, con lo que sería imposible para el docente analizar la forma en que llegó a este valor. Durante la puesta en común, el docente podrá plantear esta situación como para orientar a los alumnos hacia la necesidad de una comunicación adecuada de sus producciones.

Si esta situación se presentara en una prueba, sería necesario que el docente, antes de decidir la calificación, dialogue con el alumno para que le cuente de qué forma obtuvo este resultado. En este caso, resulta importante aclarar que es posible que, en el momento de la charla con el profesor, el alumno aplique una cláusula de un *presunto* contrato didáctico por la que, si al resolver un problema se obtiene el resultado numérico correcto, el problema debe considerarse bien resuelto.

Por otra parte, resultará propicio este momento para reflexionar acerca de las situaciones en las que se debe considerar el orden. Para ello puede proponerse a los estudiantes analizar situaciones como las siguientes:

Ejemplo 50:

- *Se elige a dos alumnos para ir a hablar como delegados del curso con el director ¿Es importante considerar quién fue elegido/a en primer término y quién en segundo?*
- *Se elige a dos alumnos como titular y suplente para representar al curso en el centro de estudiantes. ¿Es importante considerar quién fue elegido/a en primer término y quién en segundo?*

Resultará importante que el docente promueva este tipo de análisis con otras proposiciones que considere convenientes, además de fomentar el uso de estrategias alternativas que permitan a los alumnos validar los cálculos realizados (listados secuenciales o diagramas arbolados, entre otras).

[8] Los alumnos pueden utilizar cálculos que no impliquen necesariamente el conocimiento de la fórmula. Aquí se ha utilizado con el objeto de agilizar la explicación para el docente.

Probabilidad

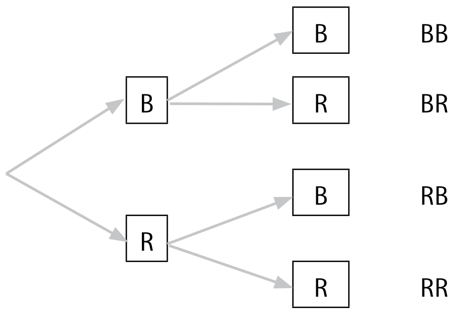
Se retomará el trabajo con experimentos aleatorios realizados en 2° año para profundizar la noción de modelo probabilístico y las limitaciones y alcances del mismo.

Se utilizará el cálculo combinatorio para determinar la cantidad de elementos de los espacios muestrales de distintos experimentos aleatorios para su posterior uso en el cálculo de probabilidades.

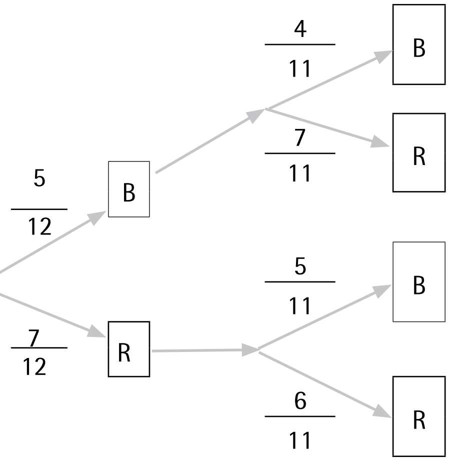
Ejemplo 51:

En una bolillero hay 12 bolillas, de las cuales 5 son blancas y el resto rojas. Al extraer de a una dos bolillas sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de que las dos bolillas extraídas sean de distinto color?

Se puede resolver el problema mediante el trabajo con un diagrama de árbol con el que se pueden analizar las posibilidades que se presentan :



A continuación las probabilidades de los diferentes sucesos pueden agregarse al árbol de manera que brinde información para encontrar la solución:



P (BB) = 5/12 x 4/11= 5/33 (1)

P (BR)= 5/12 x 7/11=35 /132 (2)

P (RB)= 7/12 x 5/11= 35/132 (3)

P (RR)=7/12 x 6/11= 7/22 (4)

La probabilidad de extraer dos bolillas del mismo color se podrá obtener sumando las probabilidades (1) y (4). Del mismo modo, la probabilidad de que ambas bolillas sean de distinto color podrá calcularse mediante la suma de (2) y (3) o realizando

$$P = 1 - [\, P(BB) + P(RR)]$$

Como puede observarse, a través del diagrama se estimula la búsqueda de caminos variados y el análisis de cuáles son los más sencillos.

Ejemplo 52:

Si se necesita calcular la probabilidad de obtener una suma mayor que siete al arrojar dos dados, realizar el espacio muestral a través de diagramas de árbol resulta extenso, por lo que es conveniente conocer otros modos de representación.

		Primer dado					
		1	2	3	4	5	6
Segundo dado	1						
	2						x
	3					x	x
	4				x	x	x
	5			x	x	x	x
	6		x	x	x	x	x

- Se clasificarán sucesos en compatibles, incompatibles (también denominados excluyentes o no excluyentes) y complementarios.
- Se calcularán probabilidades para las clases de sucesos descriptos. Se calcularán también probabilidades condicionadas.

Ejemplo 53:

- *Una gestión planifica mejoras en algunos centros de salud vecinales, por lo que registra su ubicación urbana o rural y su pertenencia a las provincias de Santa Fe y Buenos Aires.*

Ubicación / Provincia	**urbana**	**rural**	**total**
Buenos Aires	300	150	450
Santa Fe	90	40	130
total	390	190	580

- *Analizar la probabilidad de que el primer centro que se seleccione para mejoras esté ubicado en zona urbana de la provincia de Santa Fe.*
- *¿Cuál es la probabilidad de que si se seleccionó un centro de Buenos Aires sea rural?*

Como puede apreciarse no son necesarias fórmulas para la resolución de este tipo de problemas, ya que lo que se pretende es un primer acercamiento al tratamiento de la probabilidad condicional.

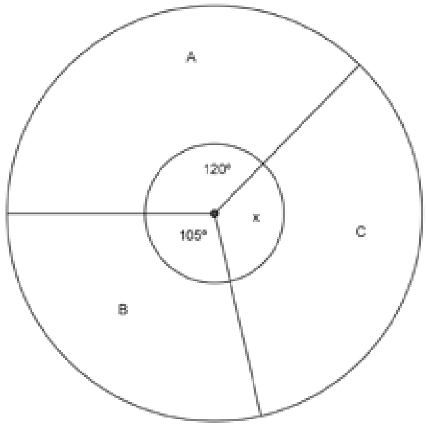
Orientaciones para la evaluación

A continuación se propone una situación que podrá utilizarse en la evaluación de algunos aspectos de este eje. Al respecto se realizan algunas consideraciones para su corrección.

A fin de evaluar la interpretación de gráficos estadísticos y la obtención de datos de los mismos, se podrá trabajar con problemas como el que sigue:

Ejemplo 54:

En las elecciones para presidente de un club no se produjeron votos en blanco ni impugnaciones. Los tres candidatos que se postularon fueron votados del modo que muestra el siguiente gráfico circular:



a. ¿Qué fracción de los votantes eligieron al candidato B?
b. Si 810 personas votaron al candidato C, ¿cuál fue la cantidad total de votantes?
c. ¿Qué porcentaje de los votantes no votó al candidato C?

Los alumnos se encuentran familiarizados con este tipo de gráficos y con el trabajo de obtener datos de ellos: desde 1º año se han venido trabajando estos temas, por lo que resultará conveniente retomarlos desde una mirada distinta a la habitual.

Posiblemente, para encontrar la respuesta a la primera cuestión, los alumnos decidan que, en primera instancia, debe calcularse el total de votantes, para luego, mediante un pertinente uso de la proporcionalidad, puedan obtener la fracción que se pide en la parte a) del enunciado.

Este efecto se podría deber a la redacción de la pregunta del ítem a), en el que se hace referencia al total de votantes y a una fracción de ese total. De este modo es comprensible que los alumnos recurran al cálculo del total de votantes y a la cantidad de votantes correspondiente a cada sector para buscar la fracción pedida.

Este modo de resolución es correcto, pero en ese caso se recomienda al docente que intervenga para que los alumnos logren evaluar que no es necesario comenzar a resolver el problema respondiendo lo pedido en el ítem b), que lo pedido cuenta con otra forma de resolución.

Esto implica que los alumnos reconozcan que se puede resolver lo pedido determinando las razones entre la medida de cada ángulo que aparece como dato en la figura de análisis y 360º, teniendo en cuenta la equivalencia entre estas razones y la fracción del total de votantes correspondiente a cada sector del gráfico circular.

En caso de que en la etapa de análisis de los enunciados (que proponemos se realice en la clase posterior a la prueba) este camino no aparezca, el docente deberá proponerlo para la discusión. Podría, por ejemplo, presentarlo como la forma de resolución del problema de un alumno hipotético. Es importante que se fomente el análisis del porqué de la equivalencia de ambos caminos, porque contribuye a la construcción del significado de la proporcionalidad.

La cuestión c), además de introducir una nueva forma de expresar los datos que brinda el gráfico, da un tipo de información adicional que es interesante incluir: el porcentaje de votantes que no lo votó.

Esta información adicional contribuye a comprender ya no el gráfico, sino la situación que presenta el problema.

Sin embargo es posible que los alumnos cometan el error de calcular el porcentaje de votantes que votó a C. Esto se debe a que raramente aparecen preguntas formuladas por la negativa que en Estadística resultan de utilidad para la comprensión de la información que brindan las encuestas. Es decir, el alumno lee el enunciado pero *automáticamente* asocia candidato C, votantes y porcentaje, dando por sentado que se está pidiendo el porcentaje de votantes de C.

Como se habrá observado, el análisis propuesto apunta a tomar conciencia de que al evaluar los aprendizajes de los jóvenes paralelamente puede evaluarse y ajustarse el proceso de enseñanza.

Anexo 1

Matrices y Transformaciones

Se transformarán puntos del plano usando coordenadas cartesianas y matrices. Se analizará el trabajo realizado para identificar las características que permitan la descripción de transformaciones.

Se estudiarán la traslación, la rotación y las simetrías.

Una matriz es una disposición rectangular de números. Puede ser utilizada para presentar información, resolver ecuaciones y también para producir transformaciones en el plano. A continuación se muestra un ejemplo de organización de información de una compra de diarios y revistas de tres personas.

En una primera semana A compró 3 diarios y 1 revista, B compró 2 diarios y 2 revistas y C compró sólo 5 diarios.

La información de la situación puede resumirse en una tabla:

personas	diarios	revistas
A	3	1
B	2	2
C	5	0

Esta información se puede disponer también en la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Puede observarse que la matriz modeliza matemáticamente la situación.[9]

Además de los trabajos que puedan realizarse dentro del modelo como camino para la búsqueda de soluciones a problemáticas planteadas, resulta importante la contextualización en el marco de esas problemáticas de otras matrices.

Por ejemplo, si la semana siguiente se obtiene la siguiente información:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

deberá poderse interpretar que en esa semana A compró un diario menos, que B compró una revista más que la semana anterior y que C compró una revista, además de los diarios de siempre.

Si queremos calcular el consumo total de las dos semanas puede procederse de la manera siguiente:

[9] Acerca de la modelización en matemática [ver p. 69, nota al pie].

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 5 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$$

Este procedimiento conocido como suma de matrices, adquiere significado en el marco del problema propuesto. Así, la suma de las matrices permite calcular el consumo de publicaciones de varias personas de manera discriminada y organizada de manera sintética.

A pesar de tratarse de un ejemplo, la generalización del procedimiento no resulta complicada si, pensando en el problema planteado y en otros de similares características que propondrá el docente, finalmente se propone construir una "especie de fórmula" en la que las cantidades se reemplazan por "incógnitas" o "constantes" expresadas en forma literal:

$$\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & j \\ h & k \\ i & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+g & d+j \\ b+h & e+k \\ c+i & f+l \end{pmatrix}$$

El docente deberá posteriormente expresar la generalización encontrada en el contexto intra-matemático del modelo que se está utilizando es decir, ayudando a los alumnos a descontextualizar el conocimiento matemático construido: en este ejemplo se ha trabajado con matrices de 3 filas y 2 columnas y se han sumado sus elementos en sus respectivas posiciones, pero para establecer el algoritmo para la suma de matrices, este debe expresarse en función de dos matrices cualquiera. Posteriormente pueden plantearse cuestiones para investigar como la conmutatividad, la existencia de elementos neutros o la asociatividad, que corresponden a problemas internos de la matemática.

Volviendo al ejemplo planteado, ¿que hubiese sucedido si el consumo de la primera semana se hubiera mantenido igual durante la segunda?

Además de la aplicación del procedimiento aprendido, observando la matriz suma obtenida será fácil deducir que se hubiese podido calcular también como:

$$2 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 4 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$$

Tendremos así un ejemplo de la multiplicación de una matriz por un escalar.

Si agregamos ahora información adicional al problema como, por ejemplo el costo de un diario es de $2 y de las revistas $8 se podrá obtener el gasto total de cada consumidor:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 5 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.2+2.8 \\ 4.2+5.8 \\ 10.2+1.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 48 \\ 28 \end{pmatrix}$$

Lo que constituye un ejemplo de aplicación de la multiplicación de matrices a un caso real.

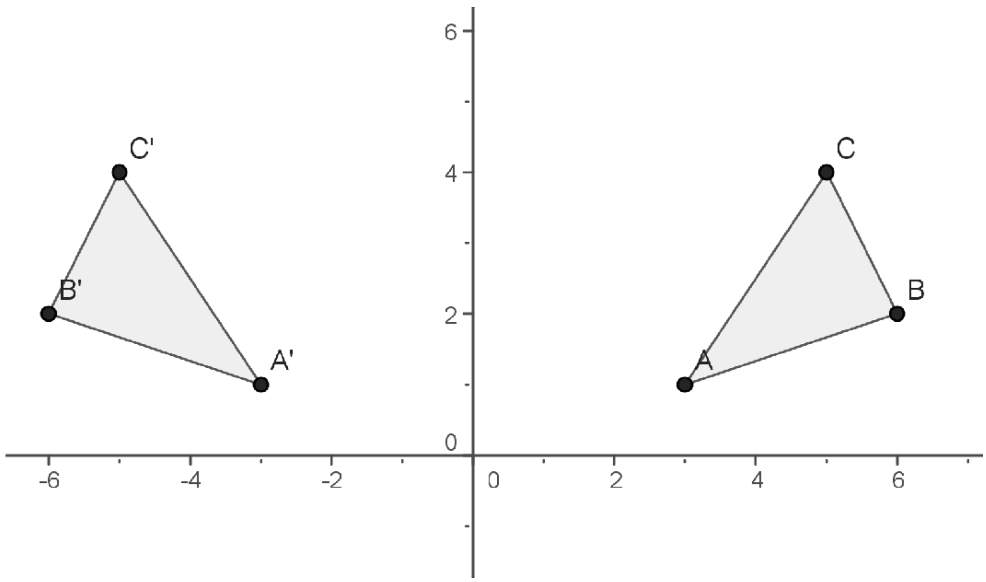
Las transformaciones del plano a través de matrices

Con las coordenadas de los vértices de un triángulo podemos construir una matriz (para ello podemos establecer una analogía entre los vértices con sus coordenadas y el consumo de las personas del problema anterior).

El triángulo cuyos vértices son A = (3 ;1) B = (6; 2) y C = (5; 4) podemos mostrarlo en una disposición matricial:

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Si se realiza una simetría axial cuyo eje coincida con el eje "y" de ordenadas se observa que las primeras componentes de los pares ordenados cambian su signo mientras que las segundas lo conservan:



En el modelo de matrices este mismo resultado puede obtenerse con el producto:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

La matriz:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

está asociada a la simetría de eje "y".

Si se multiplica una matriz formada por las coordenadas de puntos del plano por esta matriz, estos se transforman en sus simétricos con respecto al eje "y" de ordenadas.

Es una buena propuesta de investigación para los alumnos que multipliquen matrices construidas con las coordenadas de puntos extremos de segmentos o de los vértices de figuras por matrices como las siguientes para abordar otros movimientos como rotaciones y simetrías:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

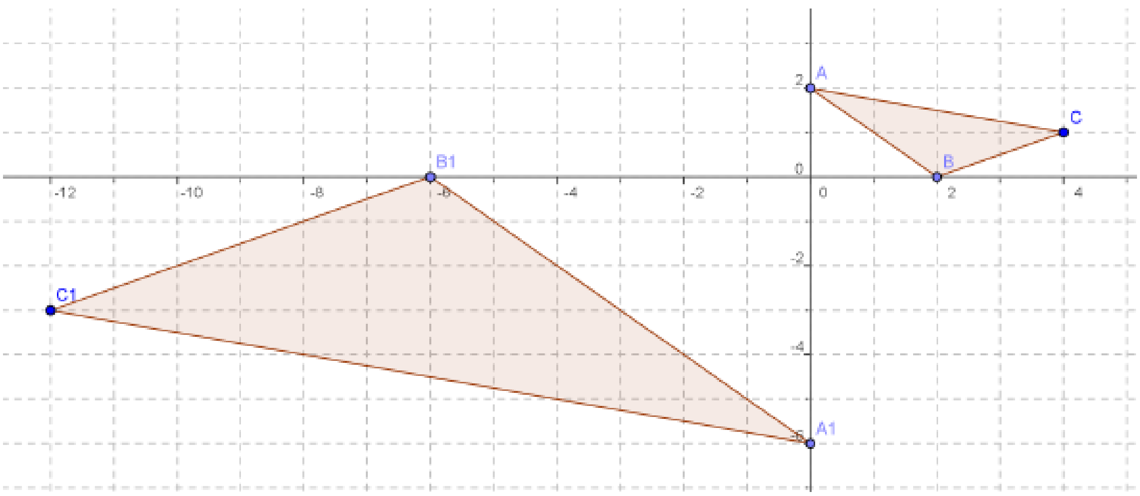
$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ En este caso se podrá abordar la homotecia de razón 2.

Otro problema que deberá proponerse para lograr la reversibilidad de los procedimientos trabajados, es el de proponer encontrar la matriz que transforme a los puntos en otros, es decir dar la transformación y encontrar la matriz correspondiente.

Homotecia y Matrices

La homotecia se trabajará con matrices de transformación, como en el ejemplo siguiente, que muestra una homotecia de razón -3 aplicada al triángulo ABC que lo transforma en $A_1B_1C_1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \\ -12 & -3 \end{pmatrix}$$



Anexo 11

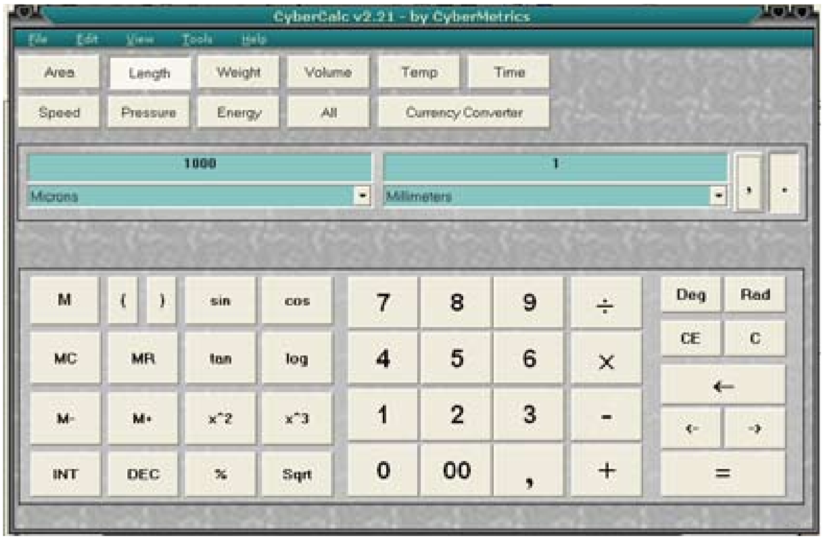
Consideraciones acerca del desplazamiento de las funciones

- La representación gráfica de una función de fórmula y = f (x) + a es equivalente a una traslación de la representación gráfica de la función de fórmula y = f (x). Si a > 0, la traslación es de a unidades hacia arriba; si a < 0 la traslación es de a unidades hacia abajo.
- La representación gráfica de una función de fórmula y = f (x – a) es equivalente a una traslación de la representación gráfica de la función de fórmula y = f (x). Si a > 0, la traslación es de a unidades hacia la derecha; si a < 0 la traslación es de a unidades hacia la izquierda.
- La representación gráfica de una función de fórmula y = f (- x) es equivalente a una simetría axial con respecto al eje y de la representación gráfica de la función de fórmula y = f (x).
- La representación gráfica de una función de fórmula y = - f (x) es equivalente a una simetría axial con respecto al eje x de la representación gráfica de la función de fórmula y = f (x).
- La representación gráfica de una función de fórmula y = a . f (x) es equivalente a una transformación que cambiará el crecimiento de la función de fórmula y = f (x) en un factor a según el eje y.

Anexo III

Conversor de unidades de medida

Existen aplicaciones que permiten convertir unidades de medida. La figura muestra uno de los conversores que pueden obtenerse fácilmente en la *web.*



Puede utilizarse también para un estudio de las propiedades de la proporcionalidad directa estudiada en años anteriores.

Bibliografía

Barbin, Evelyne y Douady, Regine (Dir.), *Enseñanza de las matemáticas: relacion entre saberes, programas y práctica*. París, Topics Editions, 1996.

Batanero, Carmen y Godino, Juan, *Estocástica y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, 2002.

Batanero, Carmen y Godino, Juan, *Razonamiento combinatorio*. Madrid, Síntesis, 1994.

Berlinski, David. *Ascenso infinito. Breve historia de las matemáticas*. Buenos Aires. Debate. 2006.

Berté, Annie, *Matemática Dinámica*. Buenos Aires, A-Z Editora, 1999.

Berté, Annie, *Matemática de EGB 3 al polimodal*. Buenos Aires, A-Z Editora, 1999.

Bishop, Alan J. *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Buenos Aires, Paidós, 1999.

Chevallard, Yves, *La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires, Aique, 1997.

Chevallard, Yves, Bosch, Marianna, Gascón, Joseph, *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona, ICE/ Horsori, 1997.

Corbalán, Fernando, *La matemática aplicada a la vida cotidiana*. Barcelona, Graó, 1998.

D´Amore, Bruno, *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Mexico. Reverté, 2006.

D´Amore, Bruno, *La complejidad de la noética en matemáticas como causa de la falta de devolución*. Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2002,

D´Amore, Bruno, "Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructiviísticas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución". Barcelona. Revista *Uno* 35, pp. 90-106.

D´Amore, Bruno, "La didáctica de la Matemática a la vuelta del milenio: raíces, vínculos e intereses". México, Revista *Educación Matemática* 12, pp. 39-50.

Del Valle de Rendo, Alicia y Vega, Viviana, *Una escuela en y para la diversidad*. Buenos Aires, Aique, 2006.

Fandiño Pinilla, Marta, *Le frazioni. Aspetti concettuali e didattici*. Bologna, Pitagora Edittrice, 2004.

Fischbein, Efraim, "The evolution with age of probabilistics, intuitively based misconceptions". Journal of researchin Mathematical Education, NCTM, 1997.

Fischbein Efraim y Vergnaud, Gérard, *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*. Bologna, Pitagora Edittrice, 1992.

de Guzmán, Miguel, *Aventuras matemáticas*. Madrid, Pirámide, 1997.

Gvirtz, Silvina y Podestá, M. E. (comp.), *Mejorar la escuela. Acerca de la gestión y la enseñanza*. Buenos Aires, Granica, 2004.

Imbernón, Francisco (coord.), *La educación en el siglo XXI. Los ritos del futuro inmediato*. Barcelona, Graó, 2000.

Ghersi, Italo, *Matematica Dilettevole e curios*a. Milano. Ulrico Hoeplie Edittore. 1978

Klimovski, Gregorio, *Las desventuras del conocimiento científico. Una introducción a la epistemología*. Buenos Aires, AZ editora, 1994

Litwin, Edith (comp.), *Tecnología Educativa*. Buenos Aires, Paidós, 1995.

Medina Rivilla y Mata S., *Didáctica General*. Prentice may, Madrid, 2003.

Meirieu, Philippe, *La opción de educar*. Barcelona, Octaedro, 2001.

Nelsen, R. B. *Proofs Without Words II: More Exercises in Visual Thinking.* Washington, Math. Assoc. Amer., 2001.

NTCM, *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sevilla, SAEM Thales, 1991.

Odifreddi, Piergiorgio, *La Matemática del siglo XX. De los conjuntos a la complejidad*. Buenos Aires, Katz, 2006.

Ortega, Tomás, *Conexiones matemáticas. Motivación del alumnado y competencia matemática*. Barcelona, Graó, 2005.
Panizza, Mabel, *Razonar y conocer*. Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2005.
Parra, Cecilia y Saiz, Irma (comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires, Paidós Educador,1994.
Plagia, Humberto; Bressan, Ana; Sadosky, Patricia, *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática*. Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2005.
Rancière, Jacques, *El maestro ignorante*. Barcelona, Laertes, 2003.
Revista *Uno*. Nº 11. "Evaluación en Matemática". Barcelona, Graó, 1997.
Revista *Uno*. Nº 16. "La gestión de la clase de Matemática". Barcelona, Graó, 1997.
Rico, Luis (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona, ICE/ Horsori, 1997.
Sadosky, Patricia, *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos.* Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2005.
Sessa, Carmen, *Iniciación al estudio didáctico del Algebra*. Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2005.
Vergnaud, Gèrard, *Aprendizajes y Didácticas: ¿Qué hay de nuevo?* Buenos Aires, Edicial, 1997.
Wolton, Dominique, *Internet y después*. Barcelona, Gedisa, 2000.

Páginas en Internet

http://www.sectormatematica.cl/articulos. http://www.uncoma.edu.ar/.../clave/didactica_de_la_matematica
http://dialnet.unirioja.es/servlet/autor?codigo=219055
http://www.peda.com/download/ (Permite descargar *Polypro* y otros programas de cuerpos geométricos).
http://www.unlu.edu.ar/~dcb/matemat/geometa1.
http://www.sectormatematica.cl/revistas.htm
http://www.campus-oei.org/oeivirt/edumat.htm
http://www.ugr.es/local/jgodino
http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate
http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/Herramientas/Recta/Recta.html
http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/MATEGENERAL/index.htm
http://www.educ.ar/educar
http://www.recursosmatematicos.com
http://www.edulab.ull.es/tecedu
http://mathworld.wolfram.com/ProofwithoutWords.html

Autoridades

Provincia de Buenos Aires
Dn. Daniel Scioli

Director General de Cultura y Educación

Presidente del Consejo General de Cultura y Educación

Prof. Mario Oporto

Vicepresidente 1° del Consejo General de Cultura y Educación

Prof. Daniel Lauría

Jefe de Gabinete

Lic. Gustavo Grasso

Subsecretario de Educación

Lic. Daniel Belinche

Director Provincial de Gestión Educativa

Prof. Jorge Ameal

Director Provincial de Educación de Gestión Privada

Dr. Néstor Ribet

Directora Provincial de Educación Inicial

Mg. Elisa Spakowsky

Directora Provincial de Educación Primaria

Prof. María de las Mercedes Gónzalez

Directora Provincial de Educación Secundaria

Mg. Claudia Bracchi

Directora Provincial de Educación Superior y Capacitación Educativa

Lic. María Verónica Piovani

Director de Educación Artística

Prof. Sergio Balderrabano

Director de Educación Física

Prof. Alejandro Ricci

ES3

Dirección General de Cultura y Educación

Buenos Aires LA PROVINCIA